PGS. TS NGUYỄN VĂN LỘC (Chủ biên)
TRẦN QUANG TÀI - MAI XUÂN ĐÔNG - LÊ NGỌC HẢI - TRỊNH MINH LÂM

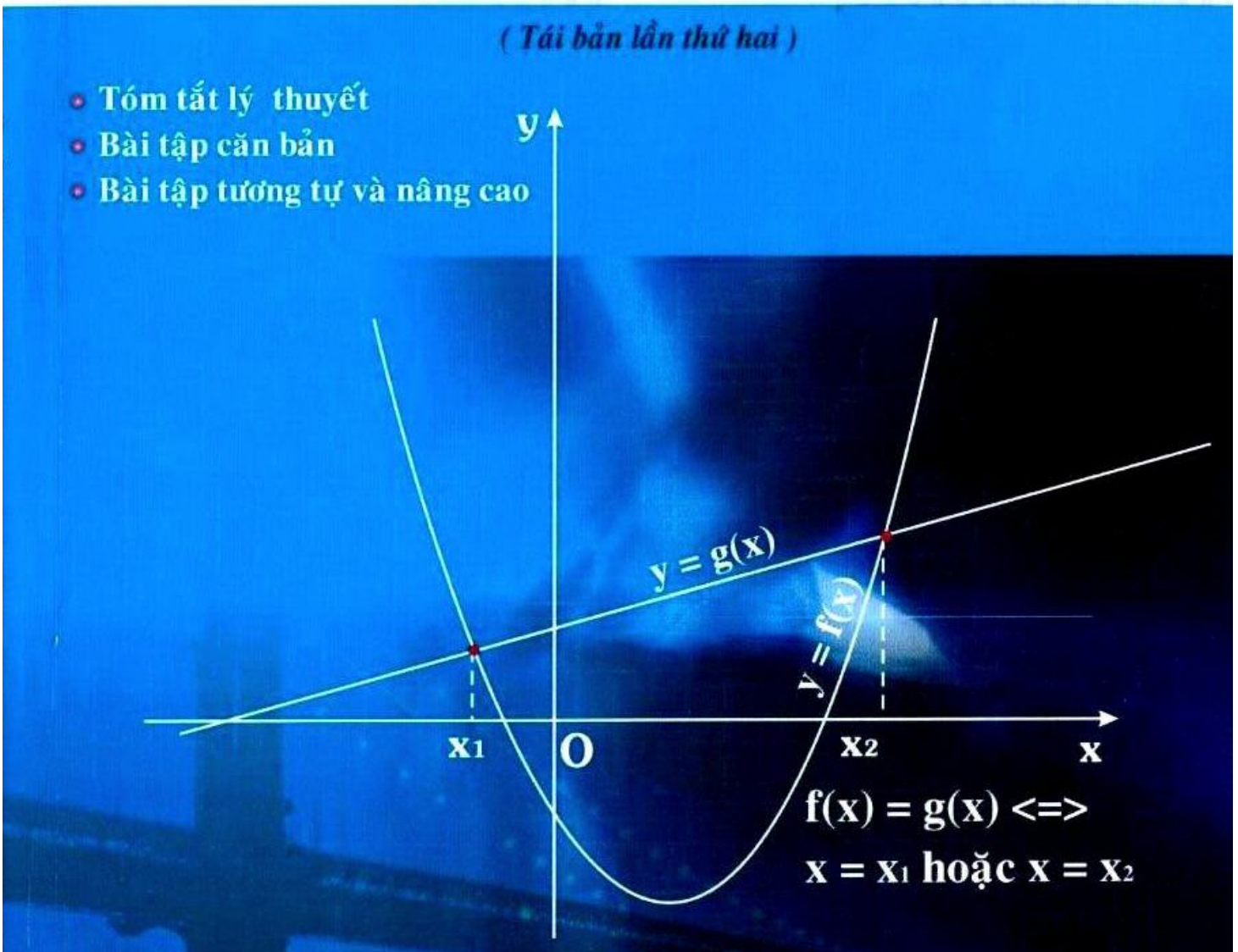
Hướng dẫn

GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10

(NÂNG CAO)

(Tái bản lần thứ hai)

- Tóm tắt lý thuyết
- Bài tập căn bản
- Bài tập tương tự và nâng cao



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PGS. TS. NGUYỄN VĂN LỘC (chủ biên)
Trần Quang Tài – Mai Xuân Đông – Lê Ngọc Hải – Trịnh Minh Lâm

Hướng dẫn

GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10

- *Tóm tắt lý thuyết*
- *Bài tập căn bản*
- *Bài tập tương tự và nâng cao*

Chương trình nâng cao
Ban Khoa học tự nhiên

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách **"Hướng dẫn giải bài tập Đại Số 10"** *gồm các chương tương ứng với các chương của chương trình* ***"Đại Số 10"****, theo chương trình nâng cao ban khoa học tự nhiên năm 2006.*

Mỗi mục (§) của chương gồm bốn phần:

I. Tóm tắt lý thuyết

II. Bài tập cơ bản

III. Bài tập tương tự và nâng cao

IV. Đáp số và hướng dẫn giải

Phần I. Trình bày những vấn đề lý thuyết trọng tâm nhất của chương trình mà các em cần phải hiểu và nắm vững.

Phần II. Trình bày lời giải chi tiết của tất cả các bài tập. Mỗi bài tập đều nêu đầy đủ các bước lập luận với căn cứ là các định nghĩa, định lí, tính chất đã học.

Phần III. Giới thiệu các bài tập cùng dạng với các bài tập SGK và các bài tập nâng cao có đánh dấu (*) dành cho học sinh khá, giỏi.

Phần IV. Trình bày đáp số và hướng dẫn giải các bài tập ở phần III.

Việc sử dụng sách nên thực hiện theo trình tự như sau: Sau khi học lý thuyết, các em hãy tự mình giải các bài tập của SGK, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo lời giải bài tập trình bày ở phần II, hơn nữa ngay cả khi giải được bài tập của SGK, các em cũng nên so sánh lời giải của mình với lời giải được trình bày trong sách này để hiểu sâu sắc, đầy đủ kiến thức và phương pháp giải bài toán. Tiếp theo các em nên dành thời gian giải các bài tập ở phần III để rèn luyện kĩ năng giải các dạng toán, nếu gặp khó khăn có thể tham khảo đáp số và hướng dẫn giải ở phần IV.

Hy vọng với cách biên soạn này, cuốn sách sẽ là tài liệu hỗ trợ tích cực giúp các em học tốt môn Đại Số 10.

Rất mong các em dùng sách với ý thức tự chủ cao và không dùng sách theo cách chỉ "đọc" các lời giải có sẵn của các bài tập SGK.

CÁC TÁC GIẢ

Chương I
MỆNH ĐỀ TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc là một câu khẳng định sai.

2. Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P", được kí hiệu là $\overline{P}$, và gọi là mệnh đề phủ định của mệnh đề P. Mệnh đề $\overline{P}$ đúng nếu mệnh đề P sai, mệnh đề $\overline{P}$ sai nếu mệnh đề P đúng.

3. Mệnh đề "Nếu P thì Q", kí hiệu là $P \Rightarrow Q$, được gọi là mệnh đề kéo theo. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng, Q sai và mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đúng trong các trường hợp còn lại.

4. Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q", kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$, được gọi là mệnh đề tương đương. Mệnh đề này đúng khi và chỉ khi P, Q cùng đúng hoặc cùng sai.

5. Khái niệm mệnh đề chứa biến. Xét các câu sau:

(1) "2n + 1 chia hết cho 3", với n là số tự nhiên.

(2) "x + y = x.y", với x và y là hai số thực.

Ở mỗi câu trên đều là những câu khẳng định chứa một hay một số biến. Nhưng chúng chưa phải là mệnh đề vì ta chưa thể xác định được tính đúng sai của chúng. Tuy nhiên nếu cho các biến nhận giá trị cụ thể thì ta được các mệnh đề.

Các câu kiểu (1) và câu kiểu (2) được gọi là mệnh đề chứa biến.

6. Phủ định của mệnh đề: "$\forall x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".

7. Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in X, P(x)$" là mệnh đề "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề thì em hãy chỉ rõ nó đúng hay nó sai.

a) Hãy đi nhanh lên!;

b) 5 + 4 + 7 = 15;

c) Năm 2002 là năm nhuận.

Giải

Các câu b) và c) là mệnh đề, ở đó c) là mệnh đề đúng còn b) là mệnh đề sai. Câu a) không phải là mệnh đề.

Bài 2. Nếu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xác định xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai.

a) Phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có nghiệm;

b) $2^{10} - 1$ chia hết cho 11.

c) Có vô số số nguyên tố.

Giải

a) Mệnh đề phủ định là: "phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ vô nghiệm". Đây là một mệnh đề sai vì phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm là $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

b) Mệnh đề phủ định là: "$2^{10} - 1$ không chia hết cho 11". Đây là mệnh đề sai vì $2^{10} - 1 = 1023$ chia hết cho 11.

c) Mệnh đề phủ định là: "Có hữu hạn các số nguyên tố". Đây là mệnh đề sai.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Xét hai mệnh đề:

P: "Tứ giác ABCD là hình vuông".

Q: "Tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc".

Phát biểu mệnh đề, $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

Giải

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách.

Cách 1. "Tứ giác ABCD là hình vuông khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc".

Cách 2. "Tứ giác ABCD là hình vuông nếu và chỉ nếu tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc".

Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

Bài 4. Cho mệnh đề chứa biến P(n): "$n^2 - 1$ chia hết cho 4", với n là số nguyên. Xét xem mệnh đề P(5) và P(2) đúng hay sai.

Giải

Mệnh đề P(5): "$5^2 - 1$ chia hết cho 4" là mệnh đề đúng, mệnh đề P(2): "$2^2 - 1$ chia hết cho 4" là mệnh đề sai.

Bài 5. Xét xem các mệnh đề sau đúng hay sai và nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề đó:

a) $\forall n \in N^*$, $n^2 - 1$ là bội số của 3;

b) $\forall x \in R$, $x^2 - x + 1 > 0$;

c) $\exists x \in Q$, $x^2 = 3$;

d) $\exists n \in N$, $2^n + 1$ là số nguyên tố.

e) $\forall n \in N$, $2^n \geq n + 2$

Giải

a) Mệnh đề sai (chẳng hạn, với $n = 3$ thì $3^2 - 1 = 8$ không là bội số của 3). Ta có mệnh đề phủ định: "$\exists n \in N^*$, $n^2 - 1$ không là bội số của 3".

b) Mệnh đề đúng (vì $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi số thực x).

Ta có mệnh đề phủ định: "$\exists x \in R$, $x^2 - x + 1 \leq 0$)".

c) Mệnh đề sai (mệnh đề này có nghĩa là $\sqrt{3}$ là một số hữu tỷ). Mệnh đề phủ định: "$\forall x \in Q$, $x^2 \neq 3$".

d) Mệnh đề đúng (chẳng hạn $n = 2$, khi đó $2^2 + 1 = 5$ là số nguyên tố). Mệnh đề phủ định: "$\forall n \in N$, $2^n + 1$ là hợp số".

e) Mệnh đề sai (chẳng hạn với n = 1 thì $2^1 < 1 + 2 = 3$). Mệnh đề phủ định là: "$\exists n \in N, 2^n < n + 2$".

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 6. Cho hai mệnh đề: P: "Số $3^{2005} - 1$ là số nguyên tố".
Q: "Số 289 là số chính phương".
Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Hỏi mệnh đề $\overline{P \Rightarrow Q}$ đúng hay sai, tại sao?

Bài 7. Nêu mệnh đề phủ định của mệnh đề sau, xét xem mệnh đề phủ định đó đúng hay sai?
a) 7! + 3! Là số lẻ; b) Số $3^{2005} - 1$ là số chẵn.

Bài 8*. Hãy xem xét tính đúng sai của mệnh đề: A: "Có 2005 số tự nhiên liên tiếp mà trong chúng không một số nào là số nguyên tố".

Bài 9. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau và lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề đó:
a) $\forall n \in N, n^2 + 1$ không chia hết cho 3;
b) $\forall n \in N, n^2 + 1$ không chia hết cho 4;
c) $\exists r \in Q, 9r^2 - 4 = 0$;
d) $\exists n \in N, n^2 - 1$ chia hết cho 8;
e) $\forall n \in N^*, 1 + 2 + ... + n$ không chia hết cho 11.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 6. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$: "Nếu số $3^{2005} - 1$ là số nguyên tố thì số 289 là số chính phương".
Ta có: $289 = 17^2$ nên mệnh đề Q là đúng, suy ra $P \Rightarrow Q$ là đúng, bởi vậy $\overline{P \Rightarrow Q}$ là mệnh đề sai.

Bài 7. a) Mệnh đề phủ định là: "7! + 3! không là số lẻ". Mệnh đề này đúng.
b) Mệnh đề phủ định là: "Số $3^{2005} - 1$ không là số chẵn". Mệnh đề này sai.

Bài 8*. Đặt M = 1.2...2006 = 2006! Khi đó xét 2005 số sau $M_2 = M + 2$, $M_3 = M + 3$, $M_4 = M + 4$, ..., $M_{2006} = M + 2006$ là những số tự nhiên liên tiếp không có số nguyên tố.
Vậy mệnh đề đã cho là đúng.

Bài 9. a) Xét n = 3k + 1, n = 3k + 2, n = 3k, với $k \in N$ cho ta kết quả $n^2 + 1$ không chia hết cho 3. Vì vậy, mệnh đề đúng. Mệnh đề phủ định là: "$\exists n \in N, n^2 + 1$ chia hết cho 3".
b) Xét n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2, n = 4k + 3, $k \in N$ ta đi đến $n^2 + 1$ không chia hết cho 4. Vì vậy mệnh đề đúng. Mệnh đề phủ định là: "$\exists n \in N, n^2 + 1$ chia hết cho 4".
c) Mệnh đề đúng vì nếu $r = \frac{2}{3}$ thì $9r^2 - 4 = 0$. Mệnh đề phủ định là:
"$\forall r \in Q, 9r^2 - 4 \neq 0$".

d) Mệnh đề đúng vì nếu n = 3 thì $n^2 - 1 = 8$ chia hết cho 8. Mệnh đề phủ định là: "$\forall n \in N$, $n^2 - 1$ không chia hết cho 8".

e) Mệnh đề sai, vì n = 10. Ta thấy 1 + 2 + ... + 10 = 55 chia hết cho 11.

Mệnh đề phủ định là: "$\exists n \in N^*$, 1 + 2 + ... + n chia hết cho 11".

§2. ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Trong toán học, định lí là những mệnh đề đúng. Thông thường định lí được phát biểu dưới dạng: "$\forall x \in X$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$" (1), trong đó P(x) và Q(x) là những mệnh đề chứa biến, X là tập hợp nào đó.

2. Phép chứng minh trực tiếp định lí (1) gồm các bước sau:

+ Giả thiết $x \in X$ và mệnh đề P(x) đúng.
+ Dùng suy luận và kiến thức toán đã biết để chỉ ra rằng mệnh đề Q(x) là đúng.

3. Phép chứng minh gián tiếp định lí (1) hay được dùng là chứng minh bằng phản ứng. Cách chứng minh này gồm các bước:

+ Giả sử tồn tại $x \in X$ sao cho P(x) đúng và Q(x) sai.
+ Dùng suy luận toán học và các kiến thức toán học đã biết chỉ ra một mâu thuẫn.

4. Ở định lí (1) ta gọi P(x) là giả thiết, Q(x) là kết luận của định lí. Ta còn nói P(x) là điều kiện đủ để có Q(x) hoặc cũng nói: Q(x) là điều kiện cần để có P(x).

5. Mệnh đề: "$\forall x \in X$, $Q(x) \Rightarrow P(x)$" là mệnh đề đảo của mệnh đề (1). Nếu mệnh đề này đúng thì ta nói nó là định lí đảo của định lí (1). Định lí thuận và định lí đảo có thể gộp thành một định lí:

"$\forall x \in X$, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$", khi đó ta còn nói:

"P(x) là điều kiện cần và đủ để có Q(x)".

hoặc "P(x) nếu và chỉ nếu Q(x)", hoặc "P(x) khi và chỉ khi Q(x)", hoặc "điều kiện cần và đủ để có P(x) là Q(x)".

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Phát biểu mệnh đề đảo của định lí "Trong một tam giác cân, hai đường cao ứng với hai cạnh bên thì bằng nhau". Mệnh đề đảo đó đúng hay sai.

Giải

Mệnh đề đảo là: Nếu một tam giác có hai đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân". Mệnh đề đảo là đúng.

Bài 2. Chứng minh định lí sau bằng phương pháp phản chứng:

"Nếu a, b là hai số dương thì $a + b \geq 2\sqrt{ab}$".

Giải

Giả sử $a + b < 2\sqrt{ab}$. Khi đó $a + b - 2\sqrt{ab} < 0$ hay $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 < 0$. Ta có một mâu thuẫn.

Bài 3. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu định lí "Nếu a và b là hai số hữu tỉ thì tổng a + b cũng là số hữu tỉ".

Giải

"Điều kiện đủ để a + b là số hữu tỉ là cả hai số a và b là số hữu tỉ.

Bài 4. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu định lí "Nếu một số tự nhiên chia hết cho 15 thì nó chia hết cho 5".

Giải

"Điều kiện cần để một số tự nhiên chia hết cho 15 là nó chia hết cho 5".

Bài 5. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lí: "Một tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi tổng hai góc đối diện của nó 180^o".

Giải

Điều kiện cần và đủ để tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn là tổng các góc đối diện của nó bằng 180^o.

Bài 6. Chứng minh định lí sau bằng phương pháp phản chứng: "Nếu n là số tự nhiên và n^2 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5".

Giải

Giả sử n^2 chia hết cho 5 và n không chia hết cho 5. Nếu $n = 5k \pm 1$, $k \in N$ thì $n^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$ không chia hết cho 5. Nếu $n = 5k \pm 2$, $k \in N$ thì $n^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$ không chia hết cho 5. Điều này cho ta một mâu thuẫn với n^2 chia hết cho 5.

LUYỆN TẬP

Bài 7. Điền dấu "x" vào ô thích hợp trong bảng sau:

Câu	Không là mệnh đề	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
$2^4 - 1$ chia hết cho 5.			
Số 153 là số nguyên tố.			
Cấm đá bóng ở đây!			
Bạn có máy tính không?			

Giải

Câu	Không là mệnh đề	Mệnh đề đúng	Mệnh đề sai
$2^4 - 1$ chia hết cho 5.		x	
Số 153 là số nguyên tố.			x
Cấm đá bóng ở đây!	x		
Bạn có máy tính không?	x		

Bài 8. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

a) Tứ giác ABCD đã cho là một hình chữ nhật;

b) Số 9801 là số chính phương.

Giải

a) Mệnh đề phủ định là: "Tứ giác ABCD đã cho không là một hình chữ nhật".

b) Mệnh đề phủ định là: "Số 9801 không là số chính phương".

Bài 9. Cho tứ giác ABCD. Xét hai mệnh đề:

P: "Tứ giác ABCD có tổng hai góc đối diện là 180^0";

Q: "Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$, và cho biết mệnh đề này đúng hay sai.

Giải

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ được phát biểu là:

"Nếu tứ giác ABCD có tổng hai góc đối diện là 180° thì tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp". Hiển nhiên mệnh đề này là mệnh đề đúng.

Bài 10. Xét hai mệnh đề: P: "4686 chia hết cho 6";

Q: "4686 chia hết cho 4".

Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết mệnh đề này đúng hay sai?

Giải

Phát biểu: "Nếu 4686 chia hết cho 6 thì 4686 chia hết cho 4". Mệnh đề này là mệnh đề sai vì mệnh đề Q là sai (do 4686 không chia hết cho 4).

Bài 11. Cho tam giác ABC. Xét mệnh đề "Tam giác ABC là tam giác vuông tại A nếu và chỉ nếu $AB^2 + AC^2 = BC^2$". Khi viết mệnh đề trên dưới dạng $P \Leftrightarrow Q$, hãy nêu mệnh đề P và mệnh đề Q.

Giải

Mệnh đề P là: "Tam giác ABC là tam giác vuông tại A";

Mệnh đề Q: "Tam giác ABC có $AB^2 + AC^2 = BC^2$".

Bài 12. Cho mệnh đề chứa biến P(x): "$x = x^2$" với x là số nguyên. Điền dấu "x" vào ô vuông thích hợp:

a) P(0)	Đúng ☐	Sai ☐
b) P(1)	Đúng ☐	Sai ☐
c) P(2)	Đúng ☐	Sai ☐
d) P(−1)	Đúng ☐	Sai ☐
e) $\exists x \in Z, P(x)$	Đúng ☐	Sai ☐
g) $\forall x \in Z, P(x)$	Đúng ☐	Sai ☐

Giải a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Sai; e) Đúng; g) Sai.

Bài 13. Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:

a) Mọi học sinh trong lớp em đều thích môn Toán;

b) Có một học sinh trong lớp em chưa biết sử dụng máy tính;

c) Mọi học sinh trong lớp em đều biết đá bóng;

d) Có một học sinh lớp em chưa bao giờ được tắm biển.

Giải

a) Mệnh đề phủ định là: "Có học sinh trong lớp em không thích môn Toán".

b) Mệnh đề phủ định là: "Mọi học sinh trong lớp em đều biết sử dụng máy tính".

c) Mệnh đề phủ định là: "Có một học sinh trong lớp em không biết đá bóng".

d) Mệnh đề phủ định là: "Tất cả các học sinh trong lớp em đều đã được tắm biển".

Bài 14. Xác định xem các mệnh đề sau đây đúng hay sai và lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề đó:

a) $\exists x \in R, x^2 = 1$;

b) $\exists n \in N, n(n + 1)$ là một số chính phương;

c) $\forall x \in R, (x - 1)^2 \neq x - 1$;

d) $\forall n \in n, n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

Giải

a) Mệnh đề đúng. Mệnh đề phủ định là "$\forall x \in R, x^2 \neq 1$".

b) Mệnh đề đúng. Mệnh đề phủ định "$\forall n \in N, n(n + 1)$ không phải là số chính phương".

c) Mệnh đề sai vì khi $x = 1$ ta có $(x - 1)^2 = x - 1$. Mệnh đề phủ định là: "$\exists x \in R, (x - 1)^2 = x - 1$".

d) Mệnh đề đúng. Thật vậy, nếu n là số tự nhiên chẵn, khi đó $n = 2k$ ($k \in N$), suy ra $n^2 + 1 = 4k^2 + 1$ không chia hết cho 4. Nếu n là số tự nhiên lẻ, khi đó $n = 2k + 1$ ($k \in N$), suy ra $n^2 + 1 = 4(k^2 + k) + 2$ cũng không chia hết cho 4.

Vậy, mệnh đề phủ định "$\exists n \in N, n^2 + 1$ chia hết cho 4" là sai.

Bài 15. Chọn phương án trả lời đúng trong các phương án đã cho sau đây:

Mệnh đề $\exists x \in R, x^2 = 2$ khẳng định rằng:

(A) Bình phương của mỗi số thực bằng 2.

(B) Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 2.

(C) Chỉ có một số thực có bình phương bằng 2.

(D) Nếu x là một số thực thì $x^2 = 2$.

Giải

Khẳng định B là đúng.

Bài 16. Kí hiệu X là tập hợp các cầu thủ x trong đội tuyển bóng rổ. P(x) là mệnh đề chứa biến "x cao trên 180cm". Xét mệnh đề sau đây: $\forall x \in X, P(x)$. Mệnh đề khẳng định rằng:

(A) Mọi cầu thủ trong đội tuyển bóng rổ đều cao trên 180cm.

(B) Trong số các cầu thủ bóng rổ có một số cầu thủ cao trên 1m80.

(C) Bất cứ ai cao trên 1m80 đều là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

(D) Có một người cao trên 1m80 là cầu thủ của đội tuyển bóng rổ.

Giải

Khẳng định (A) là khẳng định phù hợp với mệnh đề chứa biến ở trên.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 17. Cho mệnh đề chứa biến P(n): "n là số chẵn" và Q(n): "$n^2 + 5n + 4$ là số chẵn.

a) Phát biểu và chứng minh định lí "$\forall n \in N$, $P(n) \Rightarrow Q(n)$".

b) Mệnh đề "$\forall n \in N$, $Q(n) \Rightarrow P(n)$" đúng hay sai.

Bài 18. Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$. Gọi a là trung bình cộng của chúng, nghĩa là $a = \frac{a_1 + ... a_n}{n}$. Chứng minh bằng phản chứng rằng ít nhất một trong các số $a_1, ..., a_n$ sẽ lớn hơn hay bằng a.

Bài 19*. Chứng minh định lí sau bằng phương pháp phản chứng: "Nếu a, b, c là ba số dương thì $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$".

Bài 20*. Chứng minh định lí: "$\forall n \in N$, $n^3 - 13n$ chia hết cho 6".

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 17.

a) "Với mọi số tự nhiên n, nếu n là số chẵn thì $n^2 + 5n + 4$ là số chẵn".

b) "Với mọi số tự nhiên n, nếu $n^2 + 5n + 4$ là số chẵn thì n là số chẵn". Mệnh đề sai.

Bài 18. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng.

Bài 19*. Giả sử ngược lại rằng: $a^3 + b^3 + c^3 < 3abc$ (*)

(*) $\Leftrightarrow$ $(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] < 0$ (**)

Do a, b, c là những số thực dương nên từ bất đẳng thức (**) cho ta một mâu thuẫn. Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 20*. Ta có: $n^3 - 13n = n(n - 1)(n + 1) - 12n = M$

Vậy, M chia hết cho 6.

§3. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tập hợp là khái niệm cơ bản của toán học. Ta hiểu khái niệm tập hợp qua những ví dụ như: tập hợp các học sinh trong trường của em, tập hợp các số tự nhiên,...

2. Thường cho một tập hợp bằng hai cách.

+ Liệt kê các phần tử của tập hợp.
+ Chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

3. Tập rỗng là tập hợp không có phần tử nào được kí hiệu là $\varnothing$.

4. Tập A được gọi là tập hợp con của tập B, kí hiệu là $A \subset B$, nếu mỗi phần tử của A là phần tử của B. Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp.

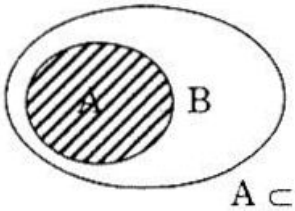
5. Hai tập hợp A, B được gọi là bằng nhau và kí hiệu là $A = B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của tập B và mỗi phần tử của B cũng là một phần tử của tập A. Từ định nghĩa này ta có:

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$.

Hai tập hợp A và B không bằng nhau được gọi là khác nhau và kí hiệu là $A \neq B$.

6. Biểu đồ Ven

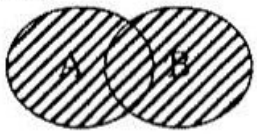
Các tập hợp có thể được minh hoạ trực quan bằng hình vẽ. Trong biểu đồ Ven, những hình giới hạn bởi một đường khép kín như hình tròn, hình elip, hình chữ nhật,... được dùng để biểu diễn tập hợp, chẳng hạn hình bên dùng để biểu diễn $A \subset B$.



$A \subset B$

7. Phép hợp:

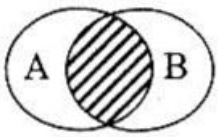
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$.



$A \cup B$

8. Phép giao:

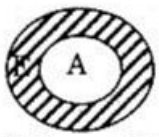
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$.



$A \cap B$

9. Phép lấy phần bù.

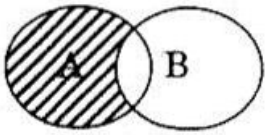
Nếu $A \subset E$ thì $C_E A = \{x \mid x \notin A \text{ và } x \in E\}$.



$C_E A$

10. Phép lấy hiệu:

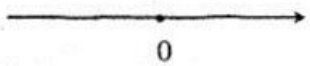
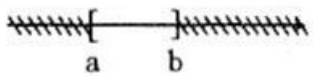
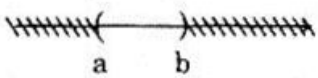
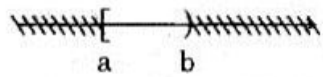
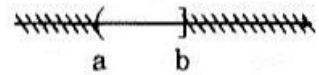
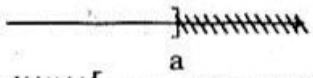
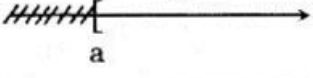
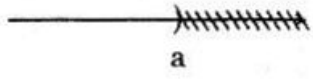
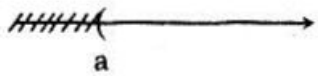
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$.



$A \setminus B$

11. Một số các tập con của tập hợp số thực

Chúng ta đã biết, tập hợp các số tự nhiên N, tập hợp các số nguyên Z, tập hợp các số hữu tỉ Q đều là các tập con của tập số thực R. Ngoài ra ta còn sử dụng một số tập con của R sau đây:

Tập hợp	*Nội dung*	Biểu diễn trên trục số
Tập số thực $(-\infty; +\infty)$	R	
Đoạn [a; b]	$\{x \in R \mid a \le x \le b\}$	
Khoảng (a; b)	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	
Nửa khoảng [a; b)	$\{x \in R \mid a \le x < b\}$	
Nửa khoảng (a; b]	$\{x \in R \mid a < x \le b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty; a]$	$\{x \in R \mid x \le a\}$	
Nửa khoảng $[a; +\infty)$	$\{x \in R \mid x \ge a\}$	
Khoảng $(-\infty; a)$	$\{x \in R \mid x < a\}$	
Khoảng $(a; +\infty)$	$\{x \in R \mid x > a\}$	

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Viết các tập hợp sau bằng cách liệt kê các phần tử của nó:

a) $A = \{x \in R \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$;

b) $B = \{n \in N^* \mid 3 < n^2 < 30\}$.

Giải

a) $A = \{0; 2; -\frac{1}{2}\}$, vì phương trình $(2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0$ có các nghiệm thực là: $0; 2; -\frac{1}{2}$.

b) $B = \{2; 3; 4; 5\}$.

Bài 2. Viết các tập hợp sau bằng cách chỉ rõ các tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó:

a) $A = \{2; 3; 5; 7\}$; **b)** $B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$;

c) $C = \{-5; 0; 5; 10; 15\}$.

Giải

a) A là tập hợp các số nguyên tố nhỏ hơn 10.

b) B là tập hợp các số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá 3.

c) C là tập hợp các số nguyên n không nhỏ hơn –5, không lớn hơn 15 và chia hết cho 5.

Bài 3. Xác định xem hai tập hợp sau có bằng nhau không:

$A = \{x \in R \mid (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\}$ và $B = \{5; 3; 1\}$

Giải

Từ cách cho tập A ta có được $A = \{2; 3; 1\}$.

Vì phương trình: $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 3$. Do đó ta có ngay: $A \neq B$.

Bài 4. Giả sử $A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{2; 6\}$; $C = \{4; 6\}$ và $D = \{4; 6; 8\}$. Hãy xác định xem tập nào là tập con của tập nào.

Giải

- Vì $2 \in A$, $6 \in A \Rightarrow B \subset A$.; • Vì $4 \in A$, $6 \in A \Rightarrow C \subset A$.
- Vì $4 \in D$, $6 \in D \Rightarrow C \subset D$.

Ngoài ra không còn tập nào là con của tập nào nữa.

Bài 5. Cho A là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em và B là tập hợp các học sinh đang học môn Tiếng Anh của trường em. Hãy mô tả các tập hợp sau:

a) $A \cap B$; **b)** $A \setminus B$; **c)** $A \cup B$; **d)** $B \setminus A$.

Giải

a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 học môn Tiếng Anh ở trường em.

b) $A \setminus B$ là tập hợp những học sinh lớp 10 nhưng không học Tiếng Anh ở trường em.

c) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 hoặc học sinh học môn Tiếng Anh.

d) B \ A là tập hợp các học sinh học môn Tiếng Anh nhưng không học lớp 10 ở trường em.

Bài 6. Gọi A, B, C, D, E và F lần lượt là tập hợp các tứ giác lồi, tập hợp các hình thang, tập hợp các hình bình hành, tập hợp các hình chữ nhật, tập hợp các hình thoi và tập hợp các hình vuông. Hỏi tập nào là con của tập nào? Hãy diễn đạt bằng lời tập hợp $D \cap E$.

Giải

- $F \subset D \subset C \subset B \subset A$; $F \subset E \subset C \subset B \subset A$;
- $D \cap E = F$, tức là tập hợp $D \cap E$ là tập hợp các hình vuông.

Bài 7. Cho $A = \{1; 3; 5\}$, $B = \{1; 2; 3\}$. Tìm hai tập hợp $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ và $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Hai tập hợp nhận được là bằng nhau hay khác nhau?

Giải

- Ta có $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$ nên $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{2; 5\}$ (1)
- Ta cũng có: $A \cup B = \{1; 2; 3; 5\}$, $A \cap B = \{1; 3\}$. Từ đó ta có: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2; 5\}$ (2),

Từ (1) và (2) ta suy ra: $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Bài 8. Điền dấu "x" vào ô thích hợp:

a) $\forall x \in R, x \in (2{,}1; 5{,}4) \Rightarrow x \in (2; 5)$	Đúng ☐	Sai ☐
b) $\forall x \in R, x \in (2{,}1; 5{,}4) \Rightarrow x \in (2; 6)$	Đúng ☐	Sai ☐
c) $\forall x \in R, -1{,}2 \le x < 2{,}3 \Rightarrow -1 \le x \le 3$	Đúng ☐	Sai ☐
d) $\forall x \in R, -4{,}3 < x \le -3{,}2 \Rightarrow -5 \le x \le -3$	Đúng ☐	Sai ☐

Giải

a) Sai; **b)** Đúng; **c)** Sai; **d)** Đúng.

Bài 9. Cho đoạn $A = [-5; 1]$ và khoảng $B = (-3; 2)$. Tìm $A \cup B$ và $A \cap B$.

Giải

$A \cup B = [-5; 2)$; $A \cap B = (-3; 1]$.

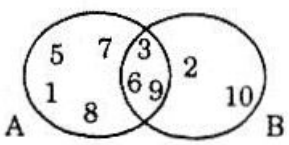
LUYỆN TẬP

Bài 10. Xác định hai tập hợp A và B biết rằng:

$A \setminus B = \{1; 5; 7; 8\}$, $B \setminus A = \{2; 10\}$ và $A \cap B = \{3; 6; 9\}$.

Giải

Ta sử dụng biểu đồ Ven



Từ biểu đồ Ven ta có: $A = \{1; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $B = \{2; 3; 6; 9; 10\}$.

Bài 11. Cho $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 9\}$, $B = \{0; 2; 4; 6; 8; 9\}$ và $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$. Hãy tìm $A \cap (B \setminus C)$ và $(A \cap B) \setminus C$. Hai tập hợp nhận được là bằng nhau hay khác nhau.

Giải

Ta có $B \setminus C = \{2; 0; 8; 9\}$ nên $A \cap (B \setminus C) = \{2; 9\}$. Mặt khác, ta có $A \cap B = \{2; 4; 6; 9\}$ nên $(A \cap B) \setminus C = \{2; 9\}$. Từ kết quả này ta thấy $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

Chú ý: Có thể dùng biểu đồ Ven ta cũng đi đến kết quả trên.

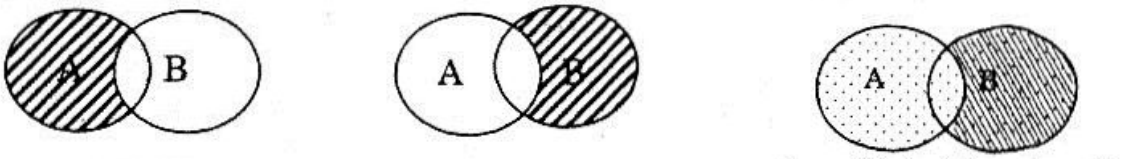
Bài 12. Cho A và B là hai tập hợp. Dùng biểu đồ Ven để kiểm nghiệm rằng:

a) $(A \setminus B) \subset A$; **b)** $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$; **c)** $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.

Giải

Xem hình dưới đây:

a) **b)** **c)**



$A \setminus B$ $B \setminus A$ $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

Bài 13. Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn không lớn hơn 10,

$B = \{n \in N \mid n \leq 6\}$ và $C = \{n \in N \mid 4 \leq n \leq 10\}$. Hãy tìm:

a) $A \cap (B \cup C)$; **b)** $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Giải

Ta có: $A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ và $C = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

Từ đó $A \cap (B \cup C) = A$

và $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \{0; 1; 2; 3; 8; 10\}$.

Bài 14. Trong các cách viết sau đây cách viết nào đúng, cách viết nào sai:

a) $a \subset \{a; b\}$ Đúng ☐ Sai ☐

b) $\{a\} \subset \{a; b\}$ Đúng ☐ Sai ☐

Giải

a) Sai; **b)** Đúng.

Bài 15. Cho tập hợp $A = \{a; b; c; d\}$. Liệt kê tất cả các tập con của A có:

a) Ba phần tử; **b)** Hai phần tử; **c)** Không quá một phần tử.

Giải

a) $\{a; b; c\}$, $\{a; b; d\}$, $\{b; c; d\}$, $\{a; c; d\}$.

b) $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{a; d\}$, $\{b; c\}$, $\{b; d\}$, $\{c; d\}$.

c) Các tập con có không quá một phần tử là: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\varnothing$.

Bài 16. Cho $A = [a; a + 2]$ và $B = [b; b + 1]$. Các số a, b cần thoả mãn điều kiện gì để $A \cap B \neq \varnothing$.

Giải

$A \cap B = \varnothing$ khi $a + 2 < b$ hoặc $b + 1 < a$ tức là $a < b - 2$ hoặc $a > b + 1$. Vậy $A \cap B \neq \varnothing$ khi $a \in [b - 2; b + 1]$.

Bài 17. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

(A) $Q \cap R = Q$; (B) $N^* \cap R = N^*$.

(C) $Z \cup Q = Q$. (D) $N \cup N^* = Z$.

Giải

- Các khẳng định (A), (B), (C) là đúng vì ta dựa vào nhận xét $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.
- Khẳng định (D) là sai vì $-1 \in Z$ nhưng $-1 \notin N \cup N^*$.
  (Chú ý là $N \cup N^* = N$).

Bài 18. Cho hai nửa khoảng $A = (-1; 0]$ và $B = [0; 1)$. Hãy tìm $A \cup B$, $A \cap B$ và $C_R A$.

Giải

- Ta có: $A \cup B = \{x \in R \setminus -1 < x \leq 0$ hoặc $0 \leq x < 1\}$
  $= \text{khoảng } (-1; 1)$.
- Ta có: $A \cap B = \{x \in R: -1 < x \leq 0$ và $0 \leq x < 1\} = \{0\}$.
- $C_R A = (-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

Bài 19. Cho $A = \{n \in Z \mid n = 2k, k \in Z\}$, B là tập hợp các số nguyên có số tận cùng là 0, 2, 4, 6, 8,

$C = \{n \in Z \mid n = 2k - 2, k \in Z\}$ và $D = \{n \in Z \mid n = 3k + 1, k \in Z\}$.

Chứng minh rằng $A = B$, $A = C$ và $A \neq D$.

Giải

- Lấy $x \in A \Rightarrow \exists k_1 \in Z$ để $x = 2k_1 \Rightarrow x$ là số chẵn hay $x \in B$.
  Ngược lại, $x \in B \Rightarrow$ tồn tại k_2 để $x = 2k_2$ với $k_2 \in Z \Rightarrow x \in A$. Vậy $A = B$.
- Lấy $x \in A \Rightarrow \exists k_1 \in Z$ để $x = 2k_1$, đặt $k_2 = k_1 - 1 \in Z \Rightarrow x = 2(k_2 - 1)$ $\Rightarrow x \in C$. Ngược lại, lấy $x \in C \Rightarrow \exists k_3 \in Z$ để $x = 2k_3 - 2$
  hay $x = 2(k_3 - 1)$, vì $k_3 - 1 \in Z \Rightarrow x \in A$. Vậy $A = C$.
- Với $k = 2 \Rightarrow 3k + 1 = 7 \notin A \Rightarrow A \neq D$.

Bài 20. Cho hai nửa khoảng $A = (0; 2]$, $B = [1; 4)$. Tìm $C_R (A \cup B)$ và $C_R (A \cap B)$.

Giải

- Ta có: $A \cup B = (0; 2] \cup [1; 4) = (0; 4)$, từ đây suy ra:
  $C_R (A \cup B) = (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.
- Ta có: $A \cap B = [1; 2]$, từ đây suy ra:
  $C_R (A \cap B) = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Bài 21. Cho $A = \{a; b; c\}$; $B = \{b; c; d\}$, $C = \{b; c; e\}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

(A) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

(B) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(C) $(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(D) $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C$.

Giải

Ta có: $B \cap C = \{b; c\}$, $A \cup B = \{a; b; c; d\}$,
$A \cup C = \{a; b; c; e\}$, $A \cap B = \{b; c\}$ nên:

- $A \cup (B \cap C) = \{a; b; c\}$, $(A \cup B) \cap C = \{b; c\}$
  $\Rightarrow$ Khẳng định (A) là sai.
- $A \cup (B \cap C) = \{a; b; c\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a; b; c\}$
  $\Rightarrow$ Khẳng định (B) là đúng.
- $(A \cup B) \cap C = \{b; c\}$, $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a; b; c\}$
  $\Rightarrow$ Khẳng định (C) là sai.
- $(A \cap B) \cup C = \{b; c; e\}$, $(A \cup B) \cap C = \{b; c\}$
  $\Rightarrow$ Khẳng định (D) là sai.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 23. Nếu tập X là tập hợp có hữu hạn phần tử thì ta nói X là tập hợp hữu hạn. Khi đó ta kí hiệu $|X|$ là số phần tử của tập X. Hai tập được gọi là rời nhau nếu giao của chúng bằng tập rỗng. Chứng minh rằng nếu A, B là hai tập hợp hữu hạn rời nhau thì ta có:

a) $|A| + |B| = |A \cup B|$ (1)

b) $|A \cup B| = |B| + |A \setminus B|$ (2)

c) $|A \setminus B| + |A \cap B| = |A|$ (3)

d) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (4)

Bài 24. Cho tập hợp $A = \{x \in R \mid a < |x| < b\}$, với a và b là các số dương thỏa mãn $a < b$. Hãy biểu diễn A thành hợp các khoảng.

Bài 25. Cho $A = \{x \in R \mid \frac{1}{|x-2|} > 2\}$ và $B = \{x \in R \mid |x - 1| < 1\}$. Hãy tìm $A \cup B$ và $A \cap B$.

Bài 26. Cho $A = \{x \in R \mid |x - 1| < 3\}$ và $B = \{x \in R \mid |x + 2| > 5\}$. Hãy tìm $A \cap B$ và $A \cup B$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 23. Giả sử A có m phần tử $A = \{a_1; a_2; ...; a_m\}$. B có n phần tử, $B = \{b_1; b_2; ...; b_n\}$. Vì $A \cap B = \varnothing$ nên không có a_i nào trùng với b_j, $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$. Do vậy $A \cup B = \{a_1; a_2; ...; a_m; b_1; b_2; ...; b_m\}$. Từ đây suy ra được: $|A \cup B| = m + n = |A| + |B|$. Vậy (1) được chứng minh.

Chú ý rằng $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$ và $B \cup (A \setminus B) = A$, nên ta có:
$|A \cup B| = |B| + |A \setminus B|$, tức là (2) được chứng minh.

Mặt khác $(A \cap B) \cup (A \setminus B) = A$ và hai tập $A \cap B$ và $A \setminus B$ rời nhau nên ta có: $|A \setminus B| + |A \cap B| = |A|$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (4).

Bài 24. $A = (-b; -a) \cup (a; b)$.

Bài 25. $A \cup B = \left(0; \frac{5}{2}\right) \setminus \{2\}$; $A \cap B = \left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

Bài 26. $A \cup B = (-\infty; -7) \cup (-2; +\infty)$; $A \cap B = (3; 4)$.

§4. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Cho a là giá trị đúng, a′ là giá trị gần đúng của a. Đại lượng $|a - a'|$, kí hiệu là $\Delta(a')$, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a′. Nếu $|a - a'| \le d$ thì d được gọi là cận trên của sai số tuyệt đối. Người ta còn gọi d là độ chính xác của số gần đúng a′.

2. Tỉ số $\frac{|a - a'|}{|a'|}$, kí hiệu là $\delta(a')$, được gọi là sai số tương đối của số gần đúng a′ (thường được nhân với 100% để viết dưới dạng phần trăm).

3. Khi thay số đúng bởi số quy tròn, ta mắc phải sai số tuyệt đối không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn.

4. Trong số gần đúng a′, một chữ số của a′ được gọi là chữ số chắc nếu sai số tuyệt đối của số a′ không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

• *Nhận xét.* Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.

5. Dạng chuẩn của số gần đúng.

• Nếu số gần đúng là số thập phân không nguyên thì dạng chuẩn là dạng mà mọi chữ số của nó đều là chữ số chắc.

• Nếu số gần đúng là số nguyên thì dạng chuẩn của nó là $A.10^k$, trong đó A là số nguyên, k là hàng thấp nhất có chữ số chắc ($k \in N$).

6. Kí hiệu khoa học của một số:

Mỗi số khác 0 đều viết được dưới dạng: $\alpha.10^n$, trong đó $1 \le |\alpha| < 10$, $n \in Z$. Dạng như thế được gọi là kí hiệu khoa học của số đó. Người ta thường dùng kí hiệu khoa học để ghi những số rất lớn hoặc rất bé.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Các nhà toán học cổ đại Trung Quốc đã dùng phân số $\frac{22}{7}$ để xấp xỉ số π. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng này biết $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$.

Giải

$$\Delta = \left|\pi - \frac{22}{7}\right| = \frac{22}{7} - \pi < 3{,}1429 - 3{,}1415 = 0{,}0014.$$

Bài 2. Một tam giác có ba cạnh như sau: a = 6,3cm ± 0,1cm; b = 10cm ± 0,2cm và c = 15cm ± 0,2cm. Tính chu vi tam giác và viết kết quả gần đúng dưới dạng chuẩn.

Giải

Chu vi tam giác là p ≈ 6,3cm + 10cm + 15cm = 31,3cm, cận trên của sai số tuyệt đối là d = 0,1 + 2.0,2 = 0,5. Ta có 0,1 < 0,5 < 1. Do đó các chữ số chắc là 3; 1. Cách viết chuẩn là P ≈ 31cm.

Bài 3. Sử dụng máy tính bỏ túi:

a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

b) Viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{100}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

Giải

a) Bấm máy tính $\sqrt[3]{2}$, trên màn hình hiện số 1,25992105. Vậy $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$ (chính xác đến hàng phần trăm) và $\sqrt[3]{2} \approx 1,260$ (chính xác đến hàng phần nghìn).

b) Bấm máy tính $\sqrt[3]{100}$, trên màn hình hiện số 4,641588834. Vậy $\sqrt[3]{100} \approx 4,64$ (chính xác đến hàng phần trăm) và $\sqrt[3]{100} \approx 4,642$ (chính xác đến hàng phần nghìn).

Bài 4. Biết rằng tốc độ của ánh sáng trong chân không là 300000km/s. Hỏi mỗi năm (365 ngày) ánh sáng đi được trong chân không là bao nhiêu? (Hãy viết dưới dạng kí hiệu khoa học).

Giải

Ta có: 1 phút = 60 giây; 1 giờ = 60 phút;
1 ngày = 24 giờ; 1 năm = 365 ngày.

Nên thời gian của một năm tính bằng đơn vị giây sẽ là:

365 . 24 . 60 . 60 = 31536000 (giây).

Ánh sáng đi được trong chân không trong thời gian 1 năm sẽ là:

31536000 . 300000km = $94,608.10^{11}$km = $9,4608.10^{12}$km.

Bài 5. Một đơn vị thiên văn xấp xỉ bằng $1,496.10^8$km. Một trạm vũ trụ di chuyển với vận tốc trung bình là 15000 m/s. Hỏi trạm vũ trụ đó phải mất bao nhiêu giây mới đi được một đơn vị thiên văn? (Hãy viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học).

Giải

Ta có: 1 km = 1000m = 10^3m

Một đơn vị thiên văn xấp xỉ bằng:

$1,496.10^8$km = $1,496.10^8.10^3$m = $1,496.10^{11}$m.

Vận tốc trung bình của một trạm vũ trụ là:

15000m/s = $1,5.10^4$m/s

Do đó số giây mà trạm vũ trụ đi hết một đơn vị thiên văn sẽ là:

$$1,496.10^{11} : 1,5.10^4 = \frac{1,496}{1,5}.10^7 \text{ (s)} \approx 9,9773.10^6\text{(s)}$$

Bài 6. Vũ trụ có tuổi thọ khoảng 15 tỉ năm. Hỏi vũ trụ có bao nhiêu ngày tuổi (một năm có 365,5 ngày)? (Hãy viết dưới dạng kí hiệu khoa học).

Giải

Ta có: 15 tỉ năm = $1,5 \cdot 10^{10}$ năm, suy ra 15 tỉ năm có số ngày là:

$1,5.10^{10}.365 = 1,5.3,65.10^{12} = 5,475.10^{12}$ (ngày)

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 7. Trong các số $\frac{17}{12}$, $\frac{99}{70}$ dùng để xấp xỉ $\sqrt{2}$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối và tìm số gần đúng tốt nhất.

Bài 8. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi AL và CI tương ứng là đường cao của các tam giác ADB và BCD. Cho biết DL = LI = IB = 1. Tính diện tích đúng của hình chữ nhật ABCD chính xác đến hàng phần trăm.

Bài 9. Cho $a = \frac{1}{1+x}$, $(0 < x < 1)$. Giả sử ta lấy $a' = 1 - x$ làm giá trị gần đúng của a. Hãy tính sai số tương đối của a′ theo x.

Bài 10*. Giả sử x là một số gần đúng của $\sqrt{5}$. Xét số $a = \frac{2x+5}{x+2}$.

Chứng minh rằng nếu lấy a là giá trị gần đúng của $\sqrt{5}$ thì sai số tuyệt đối của nó bé hơn, tức là: $|a - \sqrt{5}| < |x - \sqrt{5}|$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7. $0 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} < 1,4167 - 1,4142 = 0,0025$ (sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0025).

$0 < \frac{99}{70} - \sqrt{2} < 1,414286 - 1,414214 = 0,000072$ (sai số tuyệt đối nhỏ hơn 0,000072).

Do đó $\frac{99}{70}$ xấp xỉ $\sqrt{2}$ tốt hơn.

Bài 8. Diện tích của hình chữ nhật là: 4,24

Bài 9. $\Delta(a') = \frac{1}{1+x} - (1 - x) = \frac{x^2}{1+x}$. Do đó, sai số tương đối là:

$$\delta(a') = \frac{\Delta(a')}{1-x} = \frac{x^2}{1-x^2}.$$

Bài 10*. Đặt $u = x - \sqrt{5}$, $v = a - \sqrt{5}$. Ta có:

$$v = a - \sqrt{5} = \frac{2x + 5 - x\sqrt{5} - 2\sqrt{5}}{x+2} = \frac{(2-\sqrt{5})(x-\sqrt{5})}{x+2} = \frac{(2-\sqrt{5})u}{x+2}$$

Vậy: $|a - \sqrt{5}| = |v| = |u|\frac{\sqrt{5}-2}{x+2} < \frac{\sqrt{5}-2}{2}|u| < |u| = |x - \sqrt{5}|$.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

• Mệnh đề

1. Mệnh đề là một câu khẳng định đúng hoặc câu khẳng định sai.
2. Mệnh đề "không phải P", kí hiệu là $\overline{P}$, được gọi là mệnh đề phủ định của mệnh đề P.
3. Mệnh đề "nếu P thì Q" kí hiệu là $P \Rightarrow Q$, được gọi là mệnh đề kéo theo. Mệnh đề kéo theo chỉ sai khi P đúng, Q sai.
4. Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$, được gọi là mệnh đề tương đương. Mệnh đề này đúng khi và chỉ khi P, Q cùng đúng hoặc cùng sai.
5. Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".
6. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in X, P(x)$" là "$\forall x \in X, \overline{P(x)}$".

• Tập hợp

1. Tập A được gọi là tập con của B, kí hiệu là $A \subset B$, nếu mỗi phần tử của A là phần tử của B.
2. Phép giao: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$
3. Phép hợp: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$
4. Phép lấy phần bù: Nếu $A \subset E$ thì E / A là phần bù của A trong E, kí hiệu $C_A E$

• Số gần đúng và sai số

1. Cho a là giá trị đúng, a′ là giá trị gần đúng của a. Đại lượng $|a - a'|$, kí hiệu là $\Delta(a')$, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a′. Nếu $|a - a'| \le d$ thì d được gọi là cận trên của sai số tuyệt đối. Người ta còn gọi d là độ chính xác của số gần đúng a′.
2. Tỉ số $\dfrac{|a - a'|}{|a'|}$, kí hiệu là $\delta(a')$, được gọi là sai số tương đối của số gần đúng a′.
3. Khi thay số gần đúng bởi số quy tròn, ta mắc phải sai số tuyệt đối không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn.
4. Trong số gần đúng a′, một chữ số của a′ được gọi là chữ số chắc nếu sai số tương đối của số a′ không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho mệnh đề "$\forall x \in R, x^2 > 0$". Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

(A) $\forall x \in R, x^2 < 0$; (B) $\forall x \in R, x^2 \le 0$;

(C) $\exists x \in R, x^2 > 0$; (D) $\exists x \in R, x^2 \le 0$.

Giải

Mệnh đề phủ định của "$\forall x \in R, x^2 > 0$" là "$\exists x \in R, x^2 \le 0$", tức là mệnh đề (D)

Bài 2. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu các định lí sau:

a) Nếu tứ giác MNPQ là một hình vuông thì hai đường chéo MP và NQ bằng nhau.

b) Trong mặt phẳng, nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng ấy song song với nhau.

c) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau.

Giải

a) Điều kiện đủ để tứ giác MNPQ có hai đường chéo MP và NQ bằng nhau là tứ giác MNPQ là một hình vuông.

b) Điều kiện đủ để hai đường thẳng trong mặt phẳng song song với nhau đó là chúng phải là hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba trong mặt phẳng ấy.

c) Điều kiện đủ để hai tam giác có diện tích bằng nhau là hai tam giác đó bằng nhau.

Bài 3. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu các định lí sau:

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau.

b) Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó có hai đường vuông góc với nhau.

Giải

a) Điều kiện cần để hai tam giác bằng nhau là nó có các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau.

b) Điều kiện cần để một tứ giác là hình thoi là tứ giác đó có hai đường chéo vuông góc.

Bài 4. Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của các định lí sau đây rồi sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" hoặc "nếu và chỉ nếu" hoặc "khi và chỉ khi" để phát biểu gộp cả 2 định lí thuận và đảo:

a) Nếu n là số nguyên dương lẻ thì $5n + 6$ cũng là số nguyên dương lẻ;

b) Nếu n là số nguyên dương chẵn thì $7n + 4$ cũng là số nguyên dương chẵn.

Giải

a) Định lí đảo "Nếu n là số nguyên dương sao cho $5n + 6$ là số lẻ thì n là số lẻ". Phát biểu gộp cả định lí thuận và định lí đảo là "Với mọi số nguyên dương n, $5n + 6$ là số lẻ khi và chỉ khi n là số lẻ".

b) Định lí đảo "Nếu n là số nguyên dương sao cho $7n + 4$ là số chẵn thì n là số chẵn". Phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo là: "với mọi số nguyên dương n, $7n + 4$ là số chẵn khi và chỉ khi n là số chẵn".

Bài 5. Chứng minh các định lí sau đây bằng phương pháp phản chứng:

a) Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b phải nhỏ hơn 1;

b) Cho n là số tự nhiên, nếu $5n + 4$ là số lẻ thì n là số lẻ.

Giải

a) Giả sử ngược lại rằng $a \geq 1$ và $b \geq 1$. Ta suy ra $a + b \geq 2$.
Điều này mâu thuẫn với giả thiết $a + b < 2$. Vậy một trong hai số a và b phải nhỏ hơn 1.

b) Giả sử ngược lại rằng n là số tự nhiên chẵn, $n = 2k$ ($k \in N$). Khi đó $5n + 4 = 10k + 4 = 2(5k + 2)$ là một số chẵn. Điều này mâu thuẫn với $5n + 4$ là số lẻ. Vậy nếu $5n + 4$ là số lẻ thì n là số lẻ.

Bài 6. Gọi E là tập hợp các học sinh ở một trường trung học phổ thông. Xét các tập con của E: tập hợp các học sinh lớp 10, kí hiệu là A; tập hợp các học

sinh học môn tiếng Anh, kí hiệu là B. Hãy biểu diễn các tập hợp sau đây theo A, B và E:

a) Tập hợp các học sinh lớp 10 học tiếng Anh ở trường đó;

b) Tập hợp các học sinh lớp 10 không học tiếng Anh ở trường đó;

c) Tập hợp các học sinh không học lớp 10 hoặc không học tiếng Anh ở trường đó.

Giải

a) $A \cap B$; **b)** $A \backslash B$; **c)** $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

Bài 7.

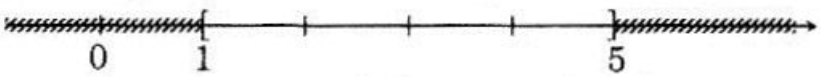
a) Ta biết rằng: $|x - 3|$ là khoảng cách từ điểm x đến điểm 3 trên trục số. Hãy biểu diễn trên trục số các điểm x mà $|x - 3| \le 2$.

b) Điền vào chỗ trống (...) trong bảng dưới đây:

$x \in [1; 5]$	$1 \le x \le 5$	$\|x - 3\|$	≤ 2
$x \in$ ...	$1 \le x \le 7$	$\|x - ...\|$	$\le ...$
$x \in$ ...	$... \le x \le 3{,}1$	$\|x - ...\|$	$\le 0{,}1$

Giải

a) Ta có: $|x - 3| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x - 3 \le 2 \Leftrightarrow 1 \le x \le 5$. Từ đó ta có hình biểu diễn tập $\{x \in R \mid |x - 3| \le 2\}$ như sau:



b)

$x \in [1; 5]$	$1 \le x \le 5$	$\|x - 3\|$	≤ 2
$x \in [1; 7]$	$1 \le x \le 7$	$\|x - 4\|$	≤ 3
$x \in [2{,}9; 3{,}1]$	$2{,}9 \le x \le 3{,}1$	$\|x - 3\|$	$\le 0{,}1$

Bài 8. Điền tiếp vào chỗ còn trống (...) trong bảng dưới đây:

$2 \le x \le 5$	$x \in [2; 5]$
$-3 \le x \le 2$	$x \in$ ...
...	$x \in [-1; 5]$
...	$x \in (-\infty; 1]$
$-5 < x$	$x \in$ ...

Giải

Ta có các chỗ còn trống được điền hoàn chỉnh trong bảng dưới đây:

$2 \le x \le 5$	$x \in [2; 5]$
$-3 \le x \le 2$	$x \in [-3; 2]$
$-1 \le x \le 5$	$x \in [-1; 5]$
$x \le 1$	$x \in (-\infty; 1]$
$-5 < x$	$x \in (-5; +\infty)$

Bài 9. Cho biết giá trị đúng của π với 10 chữ số thập phân là

$\pi = 3{,}1415926535$.

a) Giả sử ta lấy giá trị 3,14 làm giá trị gần đúng của π. Chứng tỏ sai số tuyệt đối không vượt quá 0,002.

b) Giả sử ta lấy giá trị 3,1416 là giá trị gần đúng của số π. Chứng minh rằng sai số tuyệt đối không vượt quá 0,0001.

Giải

a) Xét: $|\pi - 3,14| = \pi - 3,14 < 3,1416 - 3,14 = 0,0016 < 0,002$

b) $|\pi - 3,1416| = 3,1416 - \pi < 3,1416 - 3,1415 = 0,0001$

Bài 10. Một hình lập phương có thể tích là $V = 180,57cm^3 \pm 0,05\ cm^3$. Xác định các chữ số chắc.

Giải

Vì $0,01 < 0,05 < 0,1$ nên V chỉ có 4 chữ số chắc đó là các chữ số: 1, 8, 0, 5.

Bài 11. Cho hai nửa khoảng $A = (-\infty; m]$ và $B = [5; +\infty)$. Tùy theo giá trị của m hãy tìm $A \cap B$.

Giải

- Nếu $m = 5$ thì $A \cap B = \{5\}$;
- Nếu $m < 5$ thì $A \cap B = \varnothing$;
- Nếu $m > 5$ thì $A \cap B = [5; m]$;

Bài 12. Cho hai khoảng $A = (m; m + 1)$ và $B(3; 5)$. Tìm m để $A \cup B$ là một khoảng. Hãy xác định khoảng đó.

Giải

$A \cup B$ là một khoảng khi và chỉ khi $A \cap B \neq \varnothing$. Ta thấy $A \cap B = \varnothing$ Khi $m + 1 \leq 3$ hoặc $m \geq 5$ tức là khi $m \leq 2$ hoặc $m \geq 5$.

Vậy nếu $2 < m < 5$ thì $A \cup B$ là một khoảng.

Cụ thể hơn ta tìm được:

- Nếu $2 < m \leq 3$ thì $A \cup B$ là khoảng $(m; 5)$;
- Nếu $3 < m \leq 4$ thì $A \cup B$ là khoảng $(3; 5)$;
- Nếu $4 < m < 5$ thì $A \cup B$ là khoảng $(3; m + 1)$.

Bài 13. Hãy viết các kí hiệu khoa học của các số sau:

a) Người ta coi trên đầu mỗi người có 150.000 sợi tóc. Hỏi trong một nước có 80 triệu người thì tổng số sợi tóc của mọi người dân nước đó là bao nhiêu?

b) Sa mạc Sa-ha-ra rộng khoảng 8 triệu km^2. Giả sử mỗi mét vuông bề mặt ở đó có hai tỉ hạt cát và toàn bộ sa mạc phủ bởi cát. Hãy cho biết số hạt cát trên bề mặt sa mạc này.

c) Biết rằng $1mm^3$ máu người chứa 5 triệu hồng cầu và mỗi người có khoảng 6 lít máu. Tính số hồng cầu của mỗi người.

Giải

a) Số sợi tóc trên đầu mỗi người là: 150.000 sợi tóc $= 1,5.10^5$ sợi tóc.

Từ đấy suy ra tổng số sợi tóc của mọi người dân trong một nước có 80 triệu dân là:

$$80.000.000 \times 1,5.10^5 = 8.10^7.1,5.10^5 = 12.10^{12} = 1,2.10^{13} \text{ sợi tóc}$$

b) Ta có: 2 tỉ $= 2.\ 10^9$

8 triệu $km^2 = 8.10^6\ km^2 = 8.10^6.10^6\ m^2$ (vì $1km^2 = 10^6m^2$) $= 8.10^{12}m^2$

Số hạt cát trên bề mặt sa mạc Sa-ha-ra sẽ là:

$$8.10^{12}.2.10^9 = 16.10^{21} = 1,6.10^{22} \text{ (hạt cát)}$$

c) Ta có: 1 lít máu = 1 dm^3 máu = $10^3\ cm^3$ máu

$= 10^3.10^3.mm^3$ máu $= 10^6\ mm^3$ máu

Số mm^3 máu trong mỗi người là: 6.10^6 (mm^3)

Số hồng cầu trong mỗi người là:

$5000000.6.10^6 = 5.10^6.6.10^6 = 3.10^{13}$ (hồng cầu).

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 14. Xét các mệnh đề chứa biến sau.

P(x): "x là một kiến trúc sư". Q(x): "x là một người có tay nghề" và R(x): "x là một người kiếm được nhiều tiền". Gọi x là tập hợp toàn thể loài người trên trái đất. Hãy diễn đạt bằng lời các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow Q(x)$; **b)** $\forall x \in X, \overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{R(x)}$;

C) $\forall x \in X, P(x) \Rightarrow R(x)$.

Bài 15. a) Cho $A = \{n \in N \mid n \text{ là ước số của } 24\}$

$B = \{n \in N \mid n \text{ là ước số của } 36\}$.

Xác định $A \cap B$ và $A \cup B$.

b) Xác định $A \cap B$, $A \cup B$ và biểu diễn các tập số trên trục số trong mỗi trường hợp sau:

i) $A = \{x \in R \mid x > 0\}$; $B = \left\{x \in R \mid x < \sqrt{5} + 1\right\}$

ii) $A = \left(-\sqrt{3}; \sqrt{2}\right)$; $B = \left[1,41; \sqrt{7}\right)$.

Bài 16. Trong kì thi tốt nghiệp phổ thông trung học ở một trường X thu được kết quả các thí sinh đạt danh hiệu xuất sắc như sau:

- Về môn Toán: 48 thí sinh;
- Về môn Vật lý: 37 thí sinh;
- Về môn Văn: 42 thí sinh;
- Về môn Toán hoặc môn Vật lí: 75 thí sinh;
- Về môn Toán hoặc môn Văn: 76 thí sinh;
- Về môn Vật lí hoặc môn Văn: 66 thí sinh;
- Về cả ba môn Văn, Toán và Vật lí: 4 thí sinh;

Có bao nhiêu thí sinh nhận được danh hiệu xuất sắc về:

- Một môn?
- Hai môn?
- Ít nhất một môn?

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 14. a) Nếu một người là kiến trúc sư thì người đó có tay nghề.

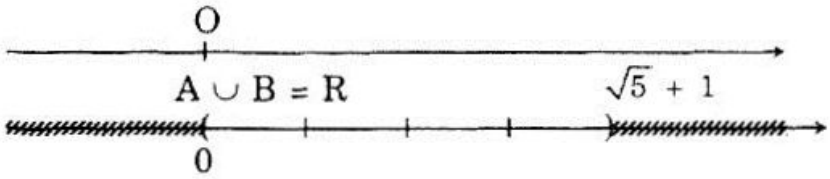
b) Nếu một người không có tay nghề thì người đó không kiếm ra tiền.

c) Nếu một người là kiến trúc sư thì người đó kiếm ra tiền.

Bài 15. a) $A \cap B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 18; 24\}$;

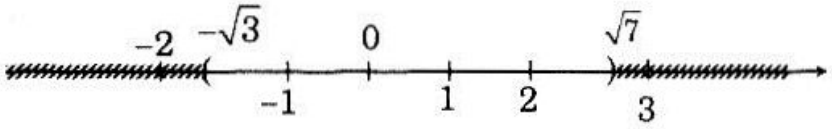
b) i) $A \cup B = (-\infty; +\infty) = R$; $A \cap B = \left(0; \sqrt{5} + 1\right)$

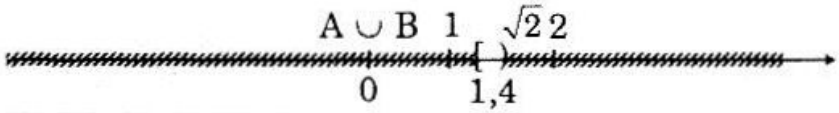
Biểu diễn trên trục số như sau:



ii) $A \cup B = \left(-\sqrt{3}; \sqrt{7}\right)$; $A \cap B = \left[1,41; \sqrt{2}\right)$

Biểu diễn trục số như sau:





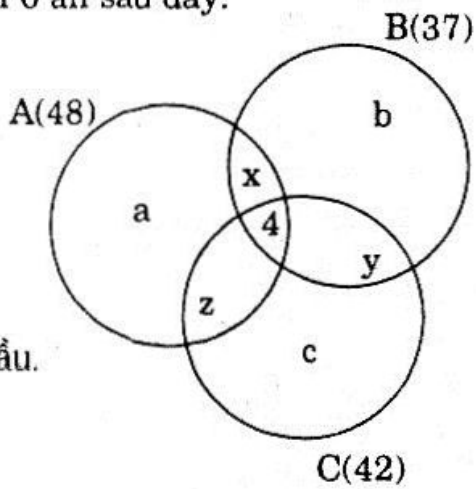
Bài 17. Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp những học sinh xuất sắc về môn Toán, môn Vật lí và môn Văn.

Gọi a, b, c lần lượt là số học sinh xuất sắc một môn về môn Toán và môn Vật lí, môn Văn.

Gọi x, y, z lần lượt là số học sinh đạt danh hiệu xuất sắc hai môn về môn Toán và môn Vật lí, môn Vật lí và môn Văn, môn Văn và môn Toán.

Dùng biểu đồ Ven đưa về hệ 6 phương trình 6 ẩn sau đây:

$$\begin{cases} a + x + z = 48 \\ b + x + y + 4 = 37 \\ c + y + z + 4 = 42 \\ a + b + x + y + z = 71 \\ a + c + x + y + z = 72 \\ b + c + x + y + z = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 28 \\ b = 18 \\ c = 19 \\ x = 6 \\ y = 9 \\ z = 10 \end{cases}$$



Từ đây ta có các kết quả của bài toán yêu cầu.

Chương II
HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. ĐẠI CƯƠNG HÀM SỐ

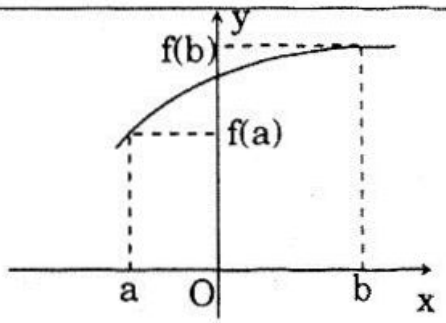
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

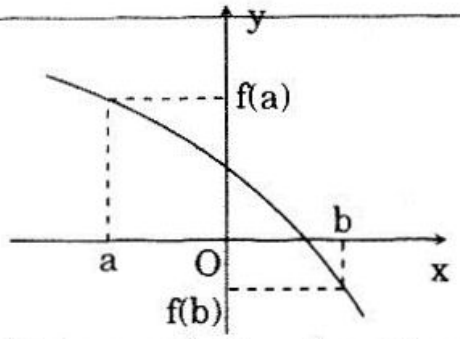
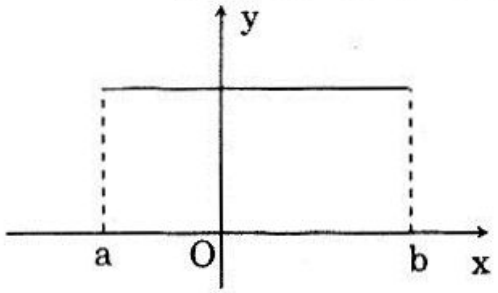
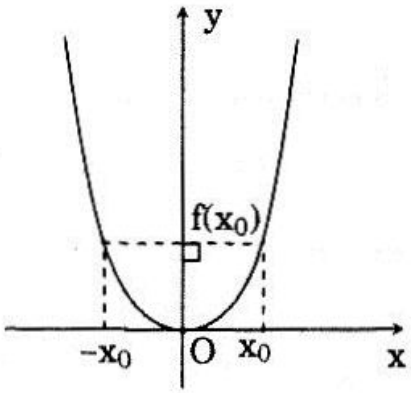
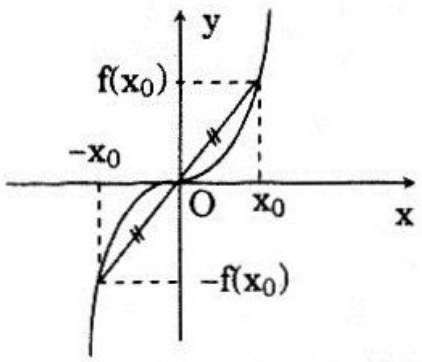
1. Cho tập hợp D khác rỗng và $D \subset R$.

- Một hàm số f xác định trên D là một quy tắc, nhờ đó với mỗi số $x \in D$ luôn xác định một số thực y duy nhất gọi là giá trị của hàm số f tại x, kí hiệu là $y = f(x)$.
- D là tập xác định, x là biến số.
- Một hàm số cho như trên thường được viết

$$f: \quad D \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

2. Hàm số dạng $y = f(x)$, trong đó $f(x)$ là một biểu thức của biến số x. Ta nói hàm số đó được cho bởi biểu thức $f(x)$. Ta quy ước: Nếu không giải thích gì thêm thì tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.
3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khi nói (G) là đồ thị hàm số $f(x)$ xác định trên D, ta hiểu rằng: $M_0(x_0; y_0) \in (G) \Leftrightarrow x_0 \in D$ và $y_0 = f(x_0)$
Qua đồ thị của hàm số ta có thể nhận biết được những tính chất của hàm số đó.
4. Tính chất của hàm số và sự thể hiện qua đồ thị.

Tính chất của hàm số	Thể hiện tính chất qua đồ thị
$y_0 = f(x_0)$ (với $x_0 \in D$)	Điểm $M_0(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (a; b) nếu với mọi x_1, x_2 thuộc khoảng (a; b): $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	 Đồ thị hàm số đi lên (từ trái qua phải) trong khoảng (a; b).

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(a; b)$ nếu với mọi x_1, x_2 thuộc khoảng $(a; b)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	 Đồ thị hàm số đi xuống (từ trái qua phải) trong khoảng $(a; b)$.
Hàm số không đổi trên khoảng $(a; b)$: $y = m$ (m là hằng số)	 Đồ thị của hàm số không đổi trên khoảng $(a; b)$ nằm trên đường thẳng song song hoặc trùng với Ox.
$y = f(x)$ là hàm số chẵn: $\forall x \in D: -x \in D$ và $f(-x) = f(x)$	 Đồ thị nhận trục Oy làm trục đối xứng.
$y = f(x)$ là hàm số lẻ: $\forall x \in D: -x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$	 Đồ thị nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

5. Tịnh tiến đồ thị song song với trục tọa độ

Định lí: Trong mặt phẳng Oxy, cho đồ thị G của hàm số $y = f(x)$; p và q là hai số dương tuỳ ý, khi đó:

1) Tịnh tiến (G) lên q đơn vị thì được đồ thị hàm số $y = f(x) + q$.

2) Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị hàm số $y = f(x) - q$.

3) Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x + p)$.

4) Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị của hàm số $y = f(x - p)$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Tìm tập xác định của hàm số sau:

a) $y = \dfrac{3x + 5}{x^2 - x + 1}$; b) $y = \dfrac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$;

c) $y = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 2}$; d) $y = \dfrac{x^2 - 2}{(x + 2)\sqrt{x + 1}}$.

Giải

a) Do phương trình $x^2 - x + 1 = 0$ vô nghiệm nên $x^2 - x + 1 \neq 0$, $\forall x \in R$

Từ đấy ta suy ra tập xác định của hàm số là R.

b) Ta có phương trình: $x^2 - 3x + 2 = 0$ có tập nghiệm là $\{1; 2\}$. Từ đây ta suy ra: $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \in R \setminus \{1; 2\}$. Vậy tập xác định của hàm số là $R \setminus \{1; 2\}$.

c) Biểu thức $\dfrac{\sqrt{x - 1}}{x - 2}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x - 1 \geq 0$ và $x - 2 \neq 0$ hay $x \geq 1$ và $x \neq 2$. Vậy tập xác định của hàm số là: $[1; 2) \cup (2; +\infty)$.

d) Biểu thức $y = \dfrac{x^2 - 2}{(x + 2)\sqrt{x + 1}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x + 2 \neq 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x \neq -2 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$

Vậy tập xác định của hàm số là $(-1; +\infty)$

Bài 2. Biểu đồ ở hình bên cho biết số triệu tấn gạo xuất khẩu của Việt Nam trong các năm từ 2000 đến 2005. Biểu đồ này cho một hàm số. Hãy cho biết tập xác định và nêu một vài giá trị của hàm số đó.

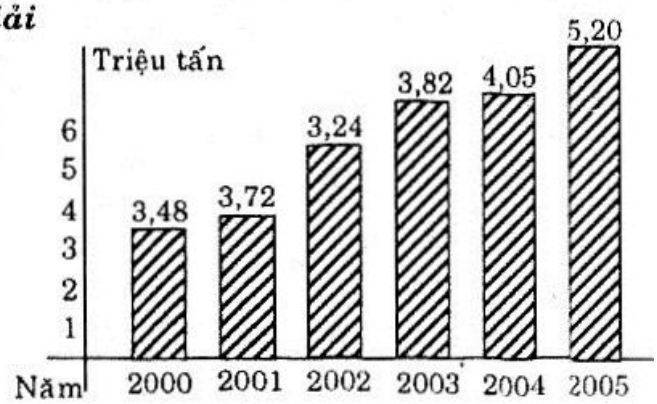
Giải

Ta gọi hàm số là f(x). Khi đó, tập xác định của hàm là: {2000; 2001; 2002; 2003; 2004; 2005}. Ta tính được:

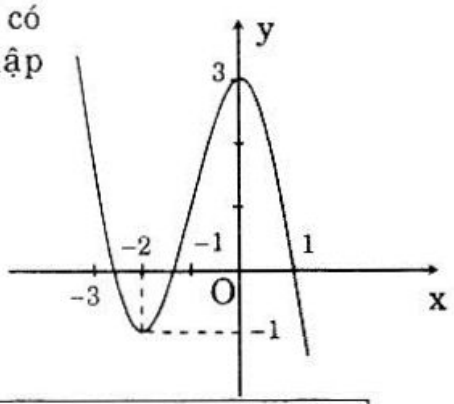
f(2000) = 3,48; f(2001) = 3,72;

f(2002) = 3,24; f(2003) = 3,82;

f(2004) = 4,05; f(2005) = 5,20.



Bài 3. Hình bên là đồ thị của một hàm số có tập xác định là R. Dựa vào đồ thị hãy lập bảng biến thiên của hàm số.



Giải

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Bài 4. Khảo sát sự biến thiên của mỗi hàm số sau và lập bảng biến thiên của nó:

a) $y = x^2 + 2x - 2$ trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$;

b) $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$;

c) $y = \dfrac{2}{x - 3}$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Giải

a) Ta có: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{\left(x_1^2 + 2x_1 - 2\right) - \left(x_2^2 + 2x_2 - 2\right)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 2$

$= x_1 + 1 + x_2 + 1 < 0$ (vì $x_1, x_2 \in (-\infty; -1)$ nên $x_1 < -1$ và $x_2 < -1$

hay $x_1 + 1 < 0$ và $x_2 + 1 < 0$)

Với $x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$ tức là $x_1 > -1$ và $x_2 > -1$

hay $x_1 + 1 > 0$ và $x_2 + 1 > 0$

Suy ra $x_1 + x_2 + 2 > 0$. Nên hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

b) Ta có: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{\left(-2x_1^2 + 4x_1 + 1\right) - \left(-2x_2^2 + 4x_2 + 1\right)}{x_1 - x_2}$

$= -2(x_1 + x_2 - 2)$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ vì $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ tức là $x_1 < 1$ và $x_2 < 1$ hay $x_1 - 1 < 0$ và $x_2 - 1 < 0$ hay $x_1 + x_2 - 2 < 0$). Tương tự ta suy ra được hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

c) Ta có: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \left(\dfrac{2}{x_1 - 3} - \dfrac{2}{x_2 - 3}\right) : (x_1 - x_2) = \dfrac{-2}{(x_1 - 3)(x_2 - 3)}$

Tương tự như ở phần b) suy ra được hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Bài 5. Mỗi hàm số sau là hàm số chẵn hay hàm số lẻ:

a) $y = x^4 - 3x^2 + 1$; **b)** $y = -2x^3 + x$;

c) $y = |x + 2| - |x - 2|$; d) $y = |2x + 1| + |2x - 1|$.

Giải

a) Hàm số $y = f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ có tập xác định D là R, do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$, hơn nữa $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$, nên $y = f(x)$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = g(x) = -2x^3 + x$ có tập xác định D là R, do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$, hơn nữa $g(-x) = -2(-x)^3 + (-x) = 2x^3 - x = -g(x)$, nên $y = g(x)$ là hàm số lẻ.

c) Hàm số $y = h(x) = |x + 2| - |x - 2|$ có tập xác định D là R, do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$, hơn nữa $h(-x) = |-x + 2| - |-x - 2| = |x - 2| - |x + 2| = -(|x + 2| - |x - 2|) = -h(x)$

Vì vậy $y = h(x)$ là hàm số lẻ.

d) Chứng minh tương tự ta có $y = |2x + 1| + |2x - 1|$ là hàm số chẵn.

Bài 6. Cho đường thẳng (d): $y = 0,5x$. Hỏi ta sẽ được đồ thị của hàm số nào khi tịnh tiến (d):

a) lên trên 3 đơn vị?; b) Xuống dưới 1 đơn vị?

c) Sang phải 2 đơn vị?; d) Sang trái 6 đơn vị?

Giải

Đặt $f(x) = 0,5x$

a) Tịnh tiến (d) lên trên 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số:

$y = f(x) + 3$ hay $y = 0,5x + 3$.

b) Tịnh tiến (d) xuống dưới 1 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số:

$y = f(x) - 1$ hay $y = 0,5x - 1$.

c) Tịnh tiến (d) sang phải 2 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số:

$y = f(x - 2) = 0,5(x - 2)$ hay $y = 0,5x - 1$.

d) Tịnh tiến (d) sang trái 6 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số:

$y = f(x + 6) = 0,5(x + 6)$ hay $y = 0,5x + 3$.

Nhận xét: đồ thị nhận được ở a) và đồ thị nhận được ở d) là một.

– Đồ thị nhận được ở b) và đồ thị nhận được ở c) cũng là một.

LUYỆN TẬP

Bài 7. Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực dương với căn bậc hai của nó có phải là một hàm số không? Vì sao?

Trả lời:

Quy tắc này không phải là một hàm số vì mỗi số thực dương có tới hai căn bậc hai phân biệt, như vậy vi phạm điều kiện duy nhất trong định nghĩa hàm số.

Bài 8. Giả sử (G) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D; A là một điểm trên trục hoành có hoành độ bằng a. Từ A, dựng đường thẳng (d) song song (hoặc trùng) với trục tung.

a) Khi nào thì (d) có điểm chung với (G).

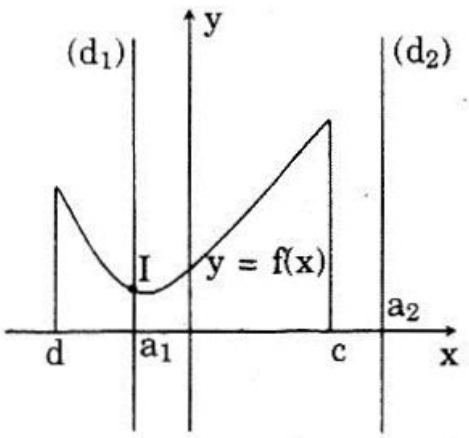
b) (d) có thể có bao nhiêu điểm chung với (G)? Vì sao?

c) Đường tròn có thể là đồ thị của hàm số không? Vì sao?

Giải

a) • (d) và (G) có điểm chung khi a ∈ D;
• (d) và (G) không có điểm chung khi a ∉ D.

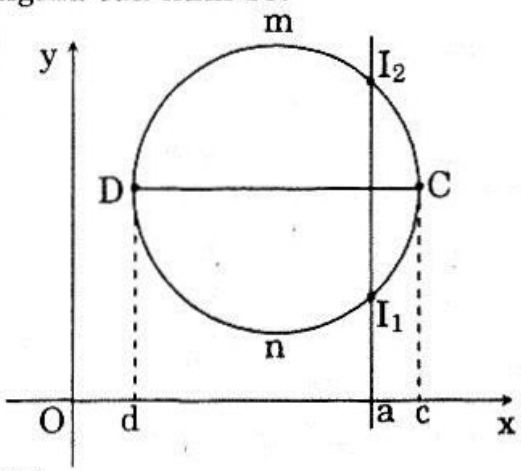
Hình vẽ bên minh họa cho trường hợp D = (d; c). Trường hợp a = a_1 ∈ D, ta có (d_1) có giao điểm với (G) tại I. Trường hợp a = a_2 ∉ D thì (d_2) và (G) không có giao điểm.



b) (d) và (G) có không quá một điểm chung, vì nếu trái lại, gọi M_1 và M_2 là hai điểm chung phân biệt thì ứng với a có tới hai giá trị của hàm số là các tung độ của điểm M_1, M_2. Trái với định nghĩa của hàm số.

c) Đường tròn trong mặt phẳng tọa độ không là đồ thị của hàm số vì có đường thẳng song song với Oy cắt nó tại hai điểm phân biệt.

Chú ý: Đường tròn có thể coi là sự hợp bởi hai đồ thị hàm số. Ở hình bên ta có thể xem đường tròn là sự hợp bởi hai đồ thị hàm số nên đồ thị (G_1) là cung $\overset{\frown}{DmC}$ và đồ thị (G_2) là cung $\overset{\frown}{DnC}$.



Bài 9. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{3x+1}{x^2-9}$; **b)** $y = \dfrac{x}{1-x^2} - \sqrt{-x}$;

c) $y = \dfrac{x-3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$; **d)** $y = \dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

Giải

a) Biểu thức $\dfrac{3x+1}{x^2-9}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ và $x \neq -3$

⇒ tập xác định của hàm số đã cho là: R \ {3; –3}.

b) Biểu thức $\dfrac{x}{1-x^2} - \sqrt{-x}$ có nghĩa ⇔ $1 - x^2 \neq 0$ và $-x \geq 0$

⇔ $x \neq 1$ và $x \neq -1$ và $x \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$ ⇒ tập xác định của hàm số là: $(-\infty; 0] \setminus \{-1\}$.

c) Biểu thức $\dfrac{x-3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$ có nghĩa ⇔ $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$ ⇒ tập xác định của hàm số là: nửa khoảng (–2; 2].

d) Tập xác định của hàm số là: $[1; 4) \cup (2; 3) \cup (3; 4]$.

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2(x-2) \text{ khi } -1 \le x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} \text{ khi } x \ge 1 \end{cases}$

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính $f(-1)$; $f(0,5)$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f(1)$ và $f(2)$.

Giải

a) Tập xác định của hàm số là: $[-1; +\infty)$;

b) $f(-1) = 6$; $f(0,5) = 3$; $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 - \sqrt{2}$; $f(1) = 0$; $f(2) = \sqrt{3}$.

Bài 11. Trong các điểm $A(-2; 8)$, $B(4; 12)$, $C(2; 8)$ và $D(5; 25 + \sqrt{2})$, điểm nào thuộc, điểm nào không thuộc đồ thị hàm số $f(x) = x^2 + \sqrt{x - 3}$? Vì sao?

Giải

Các điểm không thuộc đồ thị là A, B và C bởi vì:

$f(-2) \neq 8$; $f(4) \neq 12$; $f(2) \neq 8$.

Điểm D thuộc đồ thị hàm số vì $f(5) = 25 + \sqrt{2}$

Bài 12. Khảo sát sự biến thiên của hàm số sau trên khoảng đã cho:

a) $y = \frac{1}{x - 2}$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$;

b) $y = x^2 - 6x + 5$ trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$;

c) $y = x^{2005} + 1$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Giải

a) Hàm số $y = \frac{1}{x - 2}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

b) Hàm số $y = x^2 - 5x + 6$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

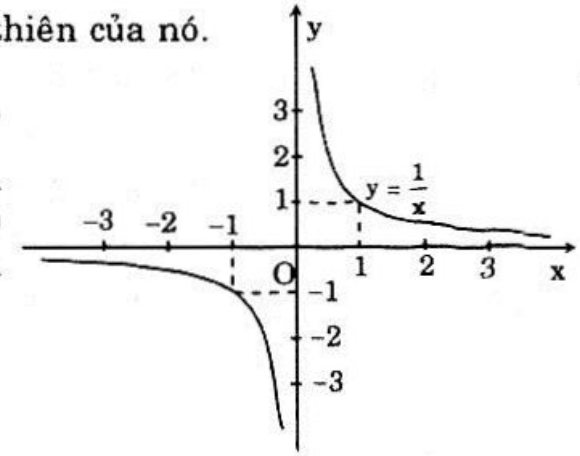
c) Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty)$, ta có $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2005} < x_2^{2005}$

$\Rightarrow x_1^{2005} + 1 < x_2^{2005} + 1$ hay $f(x_1) < f(x_2)$ ($y = f(x) = x^{2005} + 1$). Từ đấy ta có, hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$

Bài 13. Hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ có đồ thị như hình bên.

a) Dựa vào đồ thị hãy lập bảng biến thiên của nó.

b) Bằng cách xét tỉ số $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, hãy khảo sát sự biến thiên của hàm số trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ và kiểm tra kết quả so với bảng biến thiên đã lập.



Giải

a) Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$y = \frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0

b) Với mọi $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$, ta có $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$, ta có $x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{-x_1} < \frac{1}{-x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Chú ý: Ta cũng có thể làm như sau: Trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$, x_1 và x_2 luôn cùng dấu. Do đó:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) : (x_1 - x_2) = -\frac{1}{x_1 x_2} < 0$$

Từ đó, hàm số $y = \frac{1}{x}$ nghịch biến trên hai khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Bài 14. Tập con S của tập số thực R được gọi là đối xứng nếu với mọi x thuộc S, ta đều có $-x$ thuộc S. Em có nhận xét gì về tập xác định của một hàm số chẵn (hay lẻ). Từ nhận xét đó, em có kết luận gì về tính chẵn, lẻ của hàm số $y = \sqrt{x}$? Vì sao?

Giải

Từ định nghĩa hàm số chẵn và hàm số lẻ và tập đối xứng ta suy ra hàm số chẵn và hàm số lẻ phải có tập xác định là tập đối xứng. Do hàm số $y = \sqrt{x}$ có tập xác định $[0; +\infty)$, không là tập đối xứng nên hàm số $y = \sqrt{x}$ không là hàm số chẵn và cũng không là hàm số lẻ

Bài 15. Gọi (d) là đường thẳng $y = 2x$ và (d') là đường thẳng $y = 2x - 3$. Ta có thể coi (d') là do phép tịnh tiến (d).

a) Lên hay xuống dưới bao nhiêu đơn vị?

b) Sang trái hay sang phải bao nhiêu đơn vị?

Giải

a) Gọi $f(x) = 2x$. Khi đó $2x - 3 = f(x) - 3$. Do đó, muốn có (d') ta tịnh tiến (d) xuống 3 đơn vị.

b) Cũng có thể viết $2x - 3 = 2(x - \frac{3}{2}) = f(x - \frac{3}{2})$. Do đó, muốn có (d'), ta tịnh tiến (d) sang phải $\frac{3}{2}$ đơn vị.

Bài 16. Cho đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{-2}{x}$.

a) Tịnh tiến (H) lên trên một đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào?

b) Tịnh tiến (H) sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số nào?

b) Tịnh tiến (H) lên trên 1 đơn vị, sau đó tịnh tiến đồ thị nhận được sang trái 3 đơn vị. Hỏi ta được đồ thị hàm số nào?

Giải

a) Đặt $f(x) = \frac{-2}{x}$, khi tịnh tiến đồ thị (H) lên trên một đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = f(x) + 1 = \frac{-2}{x} + 1 = \frac{x-2}{x}$. Gọi đồ thị mới này là (H_1).

b) Khi tịnh tiến (H) sang trái 3 đơn vị, ta được đồ thị của hàm số

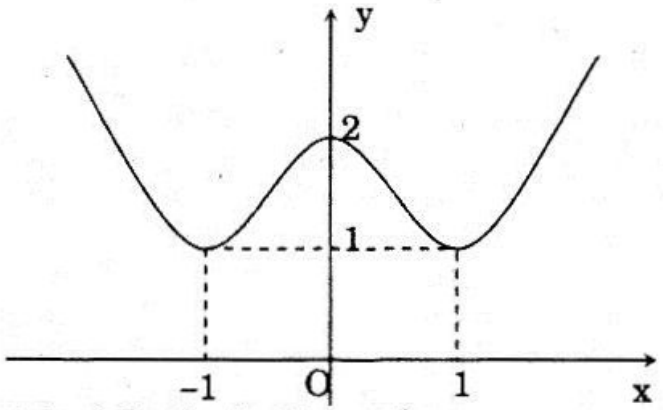
$$y = f(x+3) = -\frac{2}{x+3}$$

c) Đồ thị nhận được chính là tịnh tiến (H_1) sang trái 3 đơn vị. Do đó, ta được đồ thị của hàm số

$$y = f(x+3) + 1 = \frac{-2}{x+3} + 1 = \frac{x+1}{x+3}.$$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 17. Dựa vào đồ thị hãy lập bảng biến thiên của hàm số.



Bài 18. Xét tính chẵn lẻ của hàm số sau:

a) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4} - \sqrt{3x^2 + 4\sqrt{3}x + 2}$; b) $f(x) = \frac{x^5 - x^3 + x}{x^2 - 1}$

Bài 19*. Xét tính đồng biến nghịch biến của hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - 2$ trên các khoảng $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 17. Từ đồ thị hàm số cho ở hình vẽ ta có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	1	↗	2	↘	1	↗	$+\infty$

Bài 18. a) Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Bài 19*. Hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Hàm số bậc nhất là hàm số cho bởi công thức có dạng: $y = ax + b$ (1)

Trong đó a, b là các hằng số thực và $a \neq 0$.

2. Sự biến thiên

- Hàm số (1) đồng biến trên R khi $a > 0$.
- Hàm số (1) nghịch biến trên R khi $a < 0$.

3. Đồ thị

- Đồ thị hàm số (1) là một đường thẳng cắt cả hai trục tọa độ. Số a được gọi là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$, đường thẳng này cắt trục Oy tại điểm (0; b)
- Nếu d_1 và d_2 là hai đường thẳng phân biệt có hệ số góc là a_1, a_2 thì: $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$; (d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Tìm các cặp đường thẳng song song trong các đường thẳng sau:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$; b) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$; c) $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2$;

d) $y = \sqrt{2}x - 2$; e) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 1$; g) $y = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1\right)$.

Giải

Các cặp đường thẳng sau đây song song vì có cùng hệ số góc và tung độ gốc khác nhau.

a) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1$ và e) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - 1$

c) $y = \frac{2}{\sqrt{2}}x + 2$ và d) $y = \sqrt{2}x - 2$

b) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3$ và g) $y = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1\right)$

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 2x + 4 \text{ nếu } -2 \leq x < -1 \\ -2x \text{ nếu } -1 \leq x \leq 1 \\ x - 3 \text{ nếu } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số trên mỗi khoảng (–2; –1), (–1; 1) và (1; 3) rồi lập bảng biến thiên của hàm số.

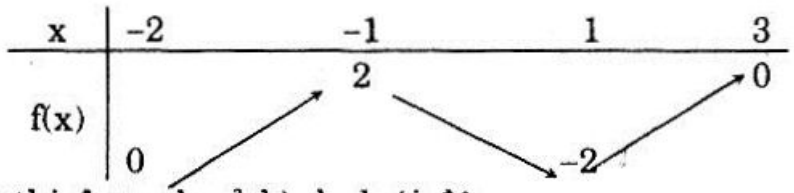
Giải

a) Tập xác định của hàm số là đoạn [–2; 3]

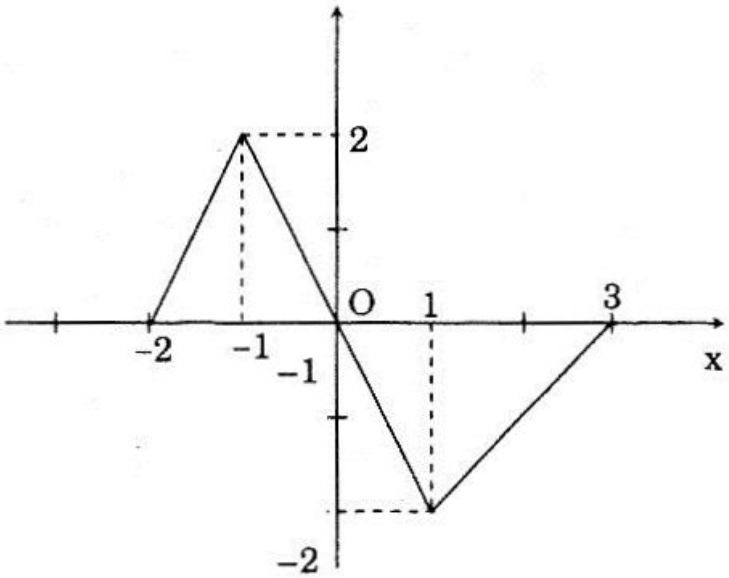
b) • Trên khoảng (–2; –1) hàm số đồng biến;

• Trên khoảng (–1; 1) hàm số nghịch biến;

• Trên khoảng (1; 3) hàm số đồng biến.



Đồ thị được cho ở hình dưới đây:



Bài 3.

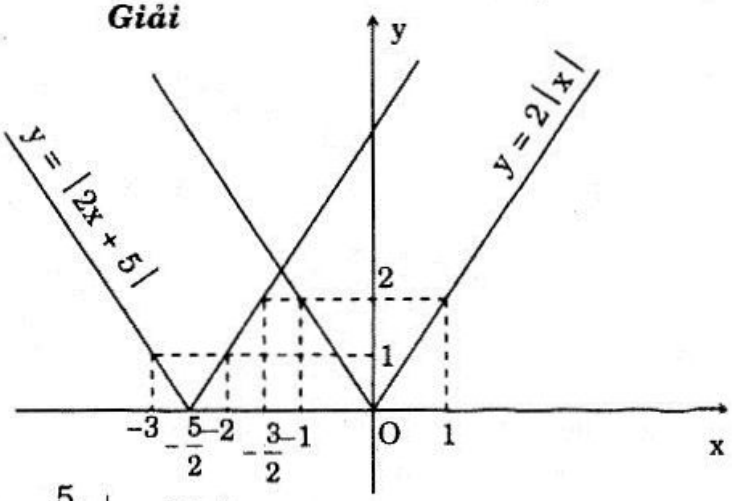
a) Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = f_1(x) = 2|x|$ và $y = f_2(x) = |2x + 5|$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Cho biết phép tịnh tiến biến đồ thị hàm số f_1 thành đồ thị hàm số f_2.

Giải

a) Ta có đồ thị hàm số f_1 và f_2 ở hình bên

b) Phép tịnh tiến sang trái $\frac{5}{2}$ đơn vị biến đồ thị hàm số $y = 2|x|$ thành đồ thị hàm số $y = |2x + 5|$. Thật vậy, ta có:



$$f_1\left(x + \frac{5}{2}\right) = 2\left|x + \frac{5}{2}\right| = |2(x + \frac{5}{2})| = f_2(x)$$

LUYỆN TẬP

Bài 4. Có phải mỗi một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ đều là đồ thị của một hàm số nào đó không? Vì sao?

Giải

Không. Vì chẳng hạn đường thẳng $x = 0$ (trục Oy) không là đồ thị của hàm số nào cả.

Bài 5. a) Tìm hàm số y = f(x), biết rằng đồ thị hàm số này là đường thẳng đi qua điểm (–2; 5) và có hệ số góc là –1,5.

b) Vẽ đồ thị hàm số tìm được.

Giải

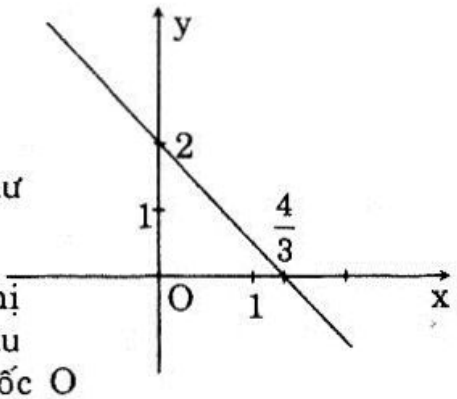
a) Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất và có dạng y = –1,5x + b. Vì đồ thị đi qua (–2; 5) nên ta có:

$5 = -1{,}5(-2) + b$

$\Leftrightarrow \quad 5 = +3 + b \Rightarrow b = 2$

Hàm số cần tìm là: $y = -\frac{3}{2}x + 2$

b) Đồ thị của hàm số $y = -\frac{3}{2}x + 2$ như hình vẽ.

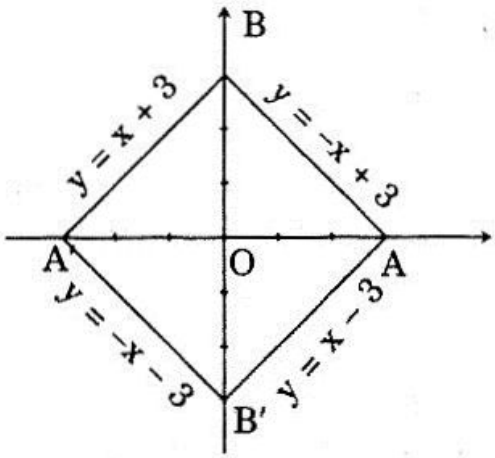


Bài 6. Tìm 4 hàm số bậc nhất có đồ thị là bốn đường thẳng đôi một cắt nhau tại bốn đỉnh của hình vuông nhận gốc O làm tâm đối xứng, biết rằng một đỉnh của hình vuông là A(3; 0).

Giải

Do tính chất O là tâm đối xứng của hình vuông nên đỉnh đối diện với A là A′ có tọa độ (–3; 0). Do hai đường chéo của hình vuông là vuông góc với nhau nên hai đỉnh còn lại thuộc Oy và dễ dàng có: B(0; 3), B′(0; –3) là hai đỉnh còn lại, từ đó suy ra 4 hàm số cần tìm là:

y = x + 3; y = –x + 3; y = x – 3; y = –x – 3.



Bài 7. Gọi (G) là đồ thị của hàm số y = 2|x|.

a) Khi tịnh tiến (G) lên trên 3 đơn vị, ta được đồ thị hàm số nào?

b) Khi tịnh tiến (G) sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số nào?

c) Khi tịnh tiến (G) sang phải 2 đơn vị, rồi xuống dưới một đơn vị, ta được đồ thị hàm số nào?

Giải

a) Khi tịnh tiến (G) lên trên 3 đơn vị ta được đồ thị hàm số:

y = 2|x| + 3

b) Khi tịnh tiến (G) sang trái 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số:

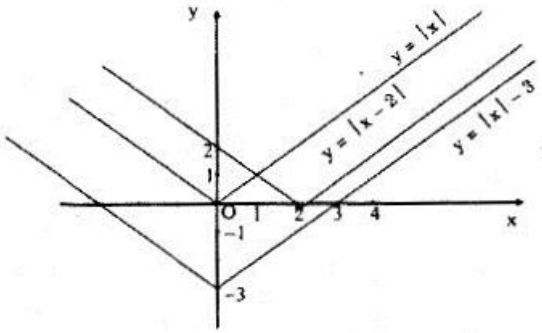
y = 2|x + 1|

c) Trước hết tịnh tiến (G) sang phải 2 đơn vị ta được đồ thị của hàm số y = 2|x – 2|, gọi đồ thị của hàm số này là (G′). Tịnh tiến (G′) xuống dưới 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số y = 2|x – 2| – 1

Bài 8. Vẽ đồ thị của hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ và nêu nhận xét về mối quan hệ giữa chúng:

a) y = |x – 2|; b) y = |x| – 3.

Giải



Hai đồ thị này đều được tịnh tiến từ đồ thị hàm số $y = |x|$, nên hình dạng chúng giống hệt nhau chỉ nằm ở vị trí khác nhau trong mặt phẳng tọa độ. Đồ thị hàm số $y = |x - 2|$ là kết quả của phép tịnh tiến sang phải 2 đơn vị từ đồ thị hàm số $y = |x|$. Đồ thị hàm số $y = |x| - 3$ là kết quả của việc tịnh tiến đồ thị hàm số $y = |x|$ xuống dưới ba đơn vị.

Bài 9. Một hãng taxi quy định tiền thuê xe mỗi kilômét là 6 nghìn đồng đối với 10km đầu tiên và 2,5 nghìn đồng đối với các kilômét tiếp theo. Một hành khách thuê xe taxi đi quãng đường x kilômét phải trả số tiền là y nghìn đồng. Khi đó, y là một hàm số của đối số x, xác định với mọi $x \geq 0$.

a) Hãy hiểu diễn y như là một hàm số $y = f(x)$ cho bởi hai biểu thức khác nhau trên hai tập $[0; 10]$ và $[10; +\infty]$.

b) Tính $f(8)$; $f(10)$ và $f(18)$.

c) Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$ và lập bảng biến thiên của nó.

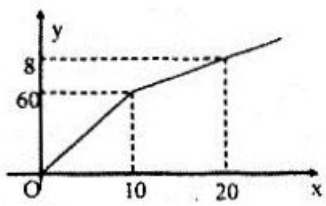
Giải

a) Khi $0 \leq x \leq 10$, tức là quãng đường đi nằm trong 10km đầu tiên, số tiền phải trả là $f(x) = 6x$ (nghìn đồng). Khi $x > 10$, tức là quãng đường đi trên 10km thì số tiền phải trả gồm hai khoản: 10km đầu phải trả với 6 nghìn đồng cho một kilômét và $(x - 10)$ km tiếp theo phải trả với giá 2,5 nghìn đồng cho một kilômét. Do đó $f(x) = 60 + 2,5(x - 10)$ hay $f(x) = 2,5x + 35$. Vậy hàm số phải tìm là:

$$f(x) = \begin{cases} 6x \text{ nếu } 0 \leq x \leq 10 \\ 2,5x + 35 \text{ nếu } x > 10 \end{cases}$$

b) Từ công thức xác định $f(x)$ ta có:
$f(8) = 48$; $f(10) = 60$; $f(18) = 80$

c) • Đồ thị hình bên.



• Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
f(x)		$+\infty$
	0	

Bài 10. Cho hàm số $y = 3|x - 1| - |2x + 2|$.

a) Bằng cách bỏ dấu giá trị tuyệt đối, hãy viết hàm số đã cho dưới dạng hàm số bậc nhất trên từng khoảng.

b) Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số đã cho.

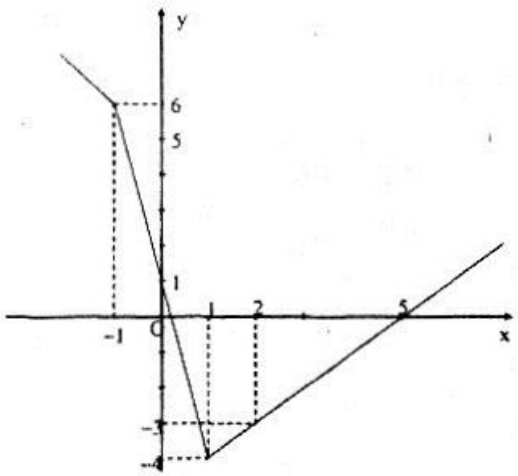
Giải

a) Ta có: $3|x - 1| = \begin{cases} 3x - 3 \text{ nếu } x \geq 1 \\ -3x + 3 \text{ nếu } x < 1 \end{cases}$

$|2x + 2| = \begin{cases} 2x + 2 \text{ nếu } x \geq -1 \\ -2x - 2 \text{ nếu } x < -1 \end{cases}$

Do đó ta viết được hàm số đã cho dưới dạng

$$y = \begin{cases} -x + 5 \text{ nếu } x < -1 \\ -5x + 1 \text{ nếu } -1 \leq x < 1 \\ x - 5 \text{ nếu } x \geq 1 \end{cases}$$



b) • Đồ thị là hình vẽ dưới đây.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	-4	↗	$+\infty$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 11. Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị của hàm số $y = 2x + m(x + 1)$

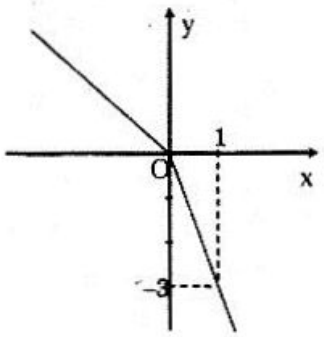
a) Đi qua gốc tọa độ O; b) Đi qua điểm M(–4; 7);

c) Song song với đường thẳng $y = \sqrt{7}x + 1$;

d) Cắt đường thẳng $y = x - 1$.

Bài 12*. Hãy tìm điểm $A(x_0; y_0)$ sao cho đường thẳng $y = (2m + 1)x - 4 + x$ luôn đi qua A, dù m lấy bất kì giá trị nào.

Bài 13*. Một tia sáng chiếu xiên một góc 45° đến điểm O trên bề mặt chất lỏng thì bị khúc xạ (như hình bên). Ta lập hệ tọa độ Oxy như đã thể hiện trên hình.



a) Hãy tìm hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trùng với tia sáng nói trên.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 11. Ta viết lại hàm số đã cho dưới dạng $y = x(2 + m) + m$.

a) $m = 0$; b) $m = -5$; c) $m = \sqrt{7} - 2$; d) $m \neq -1$.

Bài 12*. Vì A thuộc vào đường thẳng $y = (2m + 1)x - 4 + x$ với mọi m nên đẳng thức: $y_0 = (2m + 1)x_0 - 4 + x_0$ hay $y_0 - 2x_0 + 4 = 2mx_0$

Xảy ra với mọi m, điều này chỉ xảy ra khi và chỉ khi:

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 - 2x_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -4 \end{cases}$. Vậy A(0; –4)

Bài 13*. a) Hàm số cần tìm là: $y = f(x) = \begin{cases} -x \text{ nếu } x \le 0 \\ -3x \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$

b) Bảng biến thiên có dạng:

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	$-\infty$

§3. HÀM BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (1)$$

Trong đó a, b và c là các hằng số thực, $a \neq 0$.

• Từ công thức xác định hàm số ta có tập xác định của hàm số là R.

2. Khảo sát sự biến thiên

• Nếu $a > 0$, hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

• Nếu $a < 0$, hàm số (1) đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	$-\frac{\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

(Trường hợp $a > 0$)

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↗	$-\frac{\Delta}{4a}$	↘	$+\infty$

(Trường hợp $a < 0$)

3. Đồ thị

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) là một parabol có đỉnh là điểm $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$; có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$; hướng bề lõm lên trên nếu $a > 0$ và hướng xuống dưới nếu $a < 0$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho các hàm số

a) $y = -x^2 - 3$; **b)** $y = (x - 3)^2$; **c)** $y = \sqrt{2}x^2 + 1$; **d)** $y = -\sqrt{2}(x + 1)^2$

Không vẽ đồ thị, hãy mô tả đồ thị của mỗi hàm số trên bằng cách điền vào chỗ trống (...) theo mẫu:

- Đỉnh của parabol là điểm có tọa độ...
- Parabol có trục đối xứng là đường thẳng...
- Parabol hướng bề lõm (lên trên/ xuống dưới)...

Giải

a) - Đỉnh của parabol là điểm có tọa độ (0; –3);
- Parabol có trục đối xứng là trục Oy;
- Parabol hướng bề lõm xuống dưới.

b) - Đỉnh của parabol là điểm có tọa độ (3; 0);
- Parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$;
- Parabol hướng bề lõm lên trên.

c) - Đỉnh của parabol là điểm có tọa độ (0; 1);
- Parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = 0$;
- Parabol hướng bề lõm về phía trên.

d) - Đỉnh của parabol là điểm có tọa độ (–1; 0);
- Parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = -1$;
- Parabol hướng bề lõm về xuống dưới.

Bài 2. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = ax^2 + c$. Tìm a và c trong mỗi trường hợp sau:

a) y nhận giá trị bằng 2 khi $x = 2$ và có giá trị nhỏ nhất là –1;

b) Đỉnh của parabol (P) là I(0; 3) và một trong hai giao điểm của (P) với trục hoành là A(–2; 0).

Giải

a) Từ giả thiết ta có ngay $3 = 4a + c$ (1)

Do hàm số nhận giá trị nhỏ nhất là –1 nên $a > 0$ và khi đó $y = ax^2 + c \geq c \Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất đạt được là c khi $x = 0$.

Vì vậy $c = -1$, thay $c = -1$ vào (1) ta có: $a = 1$.

b) Do đỉnh của (P) là (0; 3) nên ta có: $3 = c$. Khi đó hoành độ giao điểm của (P) với Ox là nghiệm của phương trình $ax^2 + 3 = 0$. Do giả thiết phương trình này có nghiệm $x = -2$ nên ta có:

$$4a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}.$$

Bài 3. Gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = a(x - m)^2$. Tìm a và m trong mỗi trường hợp sau.

a) Parabol (P) có đỉnh là I(–3; 0) và cắt trục tung tại điểm M(0; –5);

b) Đường thẳng $y = 4$ cắt (P) tại hai điểm A(–1; 4) và B(3; 4).

Giải

a) Vì Parabol có đỉnh là (–3; 0) nên $a(-3 - m)^2 = 0$

$\Leftrightarrow m = -3$ (do $a \neq 0$). Parabol cắt Oy tại M(0; –5) nên ta có:

$-5 = a.(0 + 3)^2 \Rightarrow a = -\frac{5}{9}$. Vậy $a = -\frac{5}{9}$, $m = -3$.

b) Từ giả thiết ta suy ra phương trình $y = a(x - m)^2$ nhận 2 cặp số $y = 4$, $x = -1$ và $y = 4$, $x = 3$ là nghiệm. Từ đó ta thay vào phương trình tìm được: $a = m = 1$. Vậy $a = m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Bài 4. Viết mỗi hàm số sau đây thành dạng $y = a(x - p)^2 + q$ từ đó hãy cho biết đồ thị của nó có thể suy ra từ đồ thị hàm số nào nhờ các phép tịnh tiến đồ thị song song với các trục tọa độ và mô tả cụ thể các phép tịnh tiến.

a) $y = x^2 - 8x + 12$; **b)** $y = -3x^2 - 12x + 9$

Giải

a) Ta viết lại hàm số dưới dạng $y = 1(x - 4)^2 - 4$. Từ đấy ta thấy đồ thị hàm số này có được bằng cách tịnh tiến parabol $y = x^2$ sang phải 4 đơn vị, rồi xuống dưới 4 đơn vị.

b) Ta viết lại hàm số dưới dạng $y = -3(x + 2)^2 + 21$. Đồ thị của hàm số này có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -3x^2$ sang trái hai đơn vị sau đó tịnh tiến tiếp đồ thị hàm số mới thu được lên trên 21 đơn vị.

Bài 5. Hàm số $y = -2x^2 - 4x + 6$ có đồ thị là Parabol (P).

a) Tìm tọa độ đỉnh, phương trình trục đối xứng của (P).

b) Vẽ Parabol (P).

c) Dựa vào đồ thị, hãy cho biết tập hợp các giá trị của x sao cho $y \geq 0$.

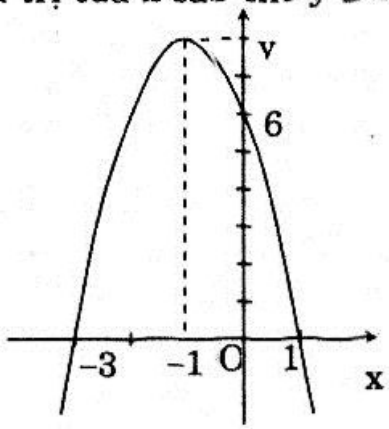
Giải

a) Đỉnh D(−1; 8), trục đối xứng có phương trình $x = -1$.

b) Đồ thị ở hình bên.

c) $y \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1$

Vậy $S = \{x \in R | -3 \leq x \leq 1\} = [-3; 1]$ là tập hợp cần tìm.



LUYỆN TẬP

Bài 1. Với mỗi hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ và $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

a) Vẽ đồ thị của mỗi hàm số.

b) Tìm tập hợp các giá trị x sao cho $y > 0$.

c) Tìm tập hợp các giá trị x sao cho $y < 0$.

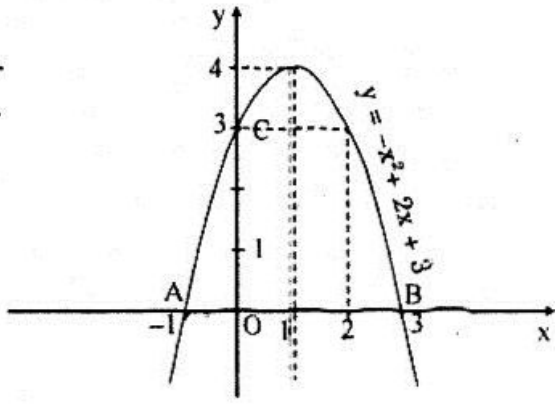
Giải

a) • Hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$

Đồ thị hàm số có trục đối xứng là $x = 1$;

Tọa độ đỉnh (1; 4)

Đồ thị giao với Oy tại C(0; 3)



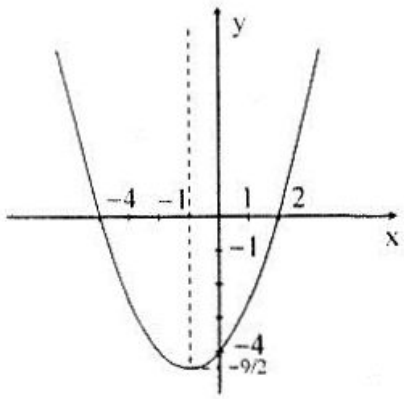
Đồ thị giao với Ox tại hai điểm A(–1; 0); B(3; 0)

Parabol quay bề lõm xuống dưới

Từ đồ thị vừa vẽ ta có:

b) $y > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$;

c) $y < 0 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x > 3$.



• Hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

- Đồ thị có trục đối xứng: $x = -1$;
- Tọa độ đỉnh $(-1; -\frac{9}{2})$;
- Đồ thị giao với Oy tại (0; –4);
- Đồ thị giao với Ox tại A(–4; 0); B(2; 0).
- Đồ thị quay bề lõm về phía trên.

Từ đồ thị vừa vẽ ta có:

b) $y > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -4 \end{array}\right.$; **c)** $y < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 2$

Bài 7. Lập bảng theo mẫu sau rồi điền vào ô trống các giá trị thích hợp (nếu có):

Hàm số	Hàm số có giá trị lớn nhất / nhỏ nhất khi x = ?	Giá trị lớn nhất	Giá trị nhỏ nhất
$y = 3x^2 - 6x + 7$			
$y = -5x^2 - 5x + 3$			
$y = x^2 - 6x + 9$			
$y = -x^2 + 4x - 1$			

Giải

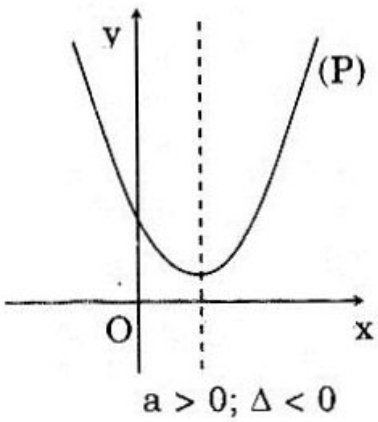
Hàm số	Hàm số có giá trị lớn nhất / nhỏ nhất khi x = ?	Giá trị lớn nhất	Giá trị nhỏ nhất
$y = 3x^2 - 6x + 7$	$x = 1$		$y = 4$
$y = -5x^2 - 5x + 3$	$x = -\frac{1}{2}$	$y = \frac{17}{4}$	
$y = x^2 - 6x + 9$	$x = 3$		$y = 0$
$y = -4x^2 + 4x - 1$	$x = \frac{1}{2}$	0	

Bài 8. Gọi (P) là đồ thị hàm số tại $y = ax^2 + bx + c$. Hãy xác định dấu của hệ số a và biệt số Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) (P) nằm hoàn toàn ở phía trên trục hoành.

b) (P) nằm hoàn toàn ở phía dưới trục hoành.

c) (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và đỉnh của (P) nằm phía trên trục hoành.

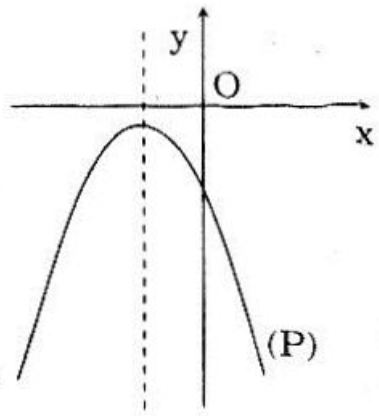


$a > 0; \Delta < 0$

Giải

a) Vì (P) nằm hoàn toàn ở phía trên trục hoành nên $a > 0$ hơn nữa do (P) ở phía trên trục hoành nên $(P) \cap Ox = \varnothing$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0$.

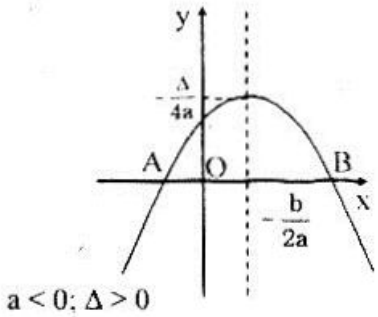


b) Tương tự ta cũng có:

$a < 0$ và $\Delta < 0$

c) (P) phải có hình dạng ở hình vẽ bên, do đó phương trình

$ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$



Mặt khác theo giả thiết thì

$$-\frac{\Delta}{4a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 0 \Leftrightarrow a < 0$$

Vậy $a < 0, \Delta > 0$

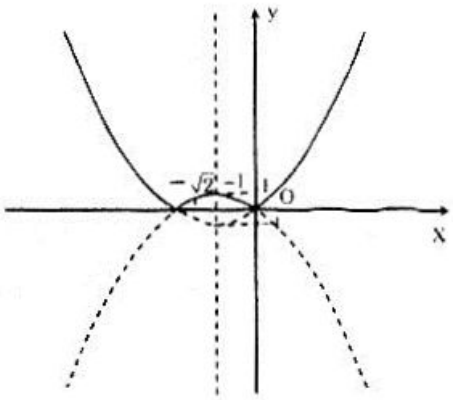
Bài 9. Vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = |x^2 + \sqrt{2}x|$; **b)** $y = -x^2 + 2|x| + 3$;

c) $y = 0{,}5x^2 - |x - 1| + 1$

Giải

a) Trước hết vẽ parabol $y = x^2 + \sqrt{2}x$ và parabol $y = -(x^2 + \sqrt{2}x)$ (chú ý là hai parabol này đối xứng với nhau qua Ox), sau đó chỉ việc xoá đi phần phía dưới Ox của cả hai parabol ấy, ta có đồ thị hàm số $y = |x^2 + \sqrt{2}x|$

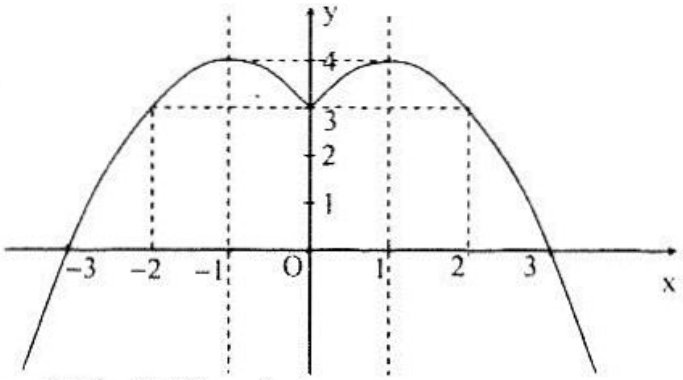


Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	2	↗	$+\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$

b) Ta nhận thấy hàm số $y = -x^2 + 2|x| + 3$ là hàm số chẵn, bởi vậy ta chỉ cần vẽ đồ thị ở bên phải Oy sau đó lấy tiếp phần đồ thị đối xứng với phần vừa vẽ qua Oy.

Trước hết ta vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$ bên phải Oy, tiếp theo lấy đối xứng với phần này qua Oy ta được đồ thị hàm số đã cho.

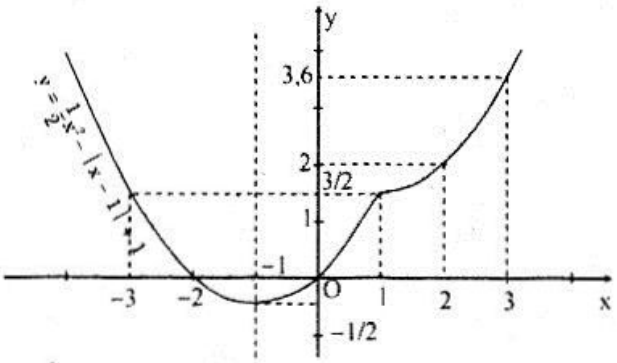


Từ đồ thị ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	4	↘	3	↗	4	↘	$-\infty$

c) Ta viết hàm số lại dưới dạng $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x, & \text{với } x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - x + 2, & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$

Đồ thị dưới đây



Từ đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

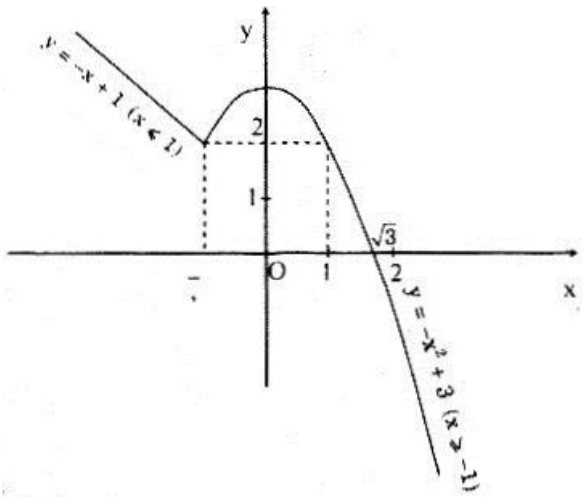
Bài 10. Vẽ đồ thị hàm số của mỗi hàm số sau:

a) $y = \begin{cases} -x + 1 \text{ khi } x \leq -1, \\ -x^2 + 3 \text{ khi } x > -1 \end{cases}$;

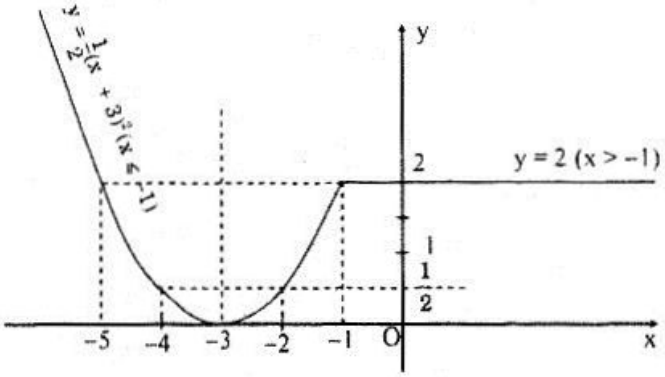
b) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3)^2 \text{ khi } x \leq -1, \\ 2 \text{ khi } x > -1 \end{cases}$

Giải

a)

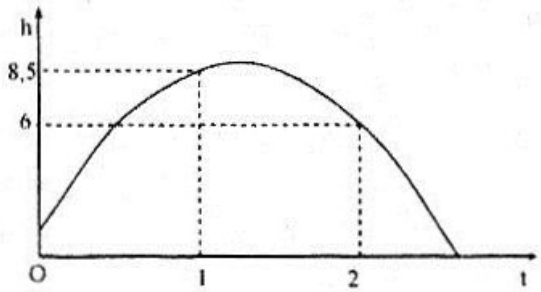


b)



Bài 11. (Bài toán bóng đá)

Khi một quả bóng được đá lên sẽ đạt đến độ cao nhất, rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ độ cao 1,2m. Sau đó 1s, nó đạt được độ cao 8,5m, và 2s sau khi đá lên, nó ở độ cao 6m (hình dưới đây)



a) Hãy tìm: Hàm số có đồ thị trùng với quỹ đạo của bóng trong tình huống trên.

b) Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên (chính xác đến hàng phần trăm).

c) Xác định độ cao lớn nhất của quả bóng (tính chính xác đến hàng phần nghìn)

Giải

Giả sử $h = f(t) = at^2 + bt + c$. Ta cần tìm a, b, c.

Theo giả thiết quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m, nghĩa là f(0) = 1,2 $\Rightarrow$ c = 1,2. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m nên f(1) = a + b + 1,2 = 8,5. 2 giây sau khi đá quả bóng lên, quả bóng ở độ cao 6m, nghĩa là f(x) = 4a + 2b + 1,2 = 6 từ đó ta có hệ phương trình bậc nhất:

$$\begin{cases} a + b = 7,3 \\ 2a + b = 2,4 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có a = −4,9, b = 12,2. Vậy hàm số cần tìm là:

$f(t) = -4,9t^2 + 12,2t + 1,2$

b) Giải phương trình $-4,9t^2 + 12,2t + 1,2 = 0$, ta được nghiệm gần đúng là −0,09 và 2,58. Vậy quả bóng chạm đất sau 2,58 giây.

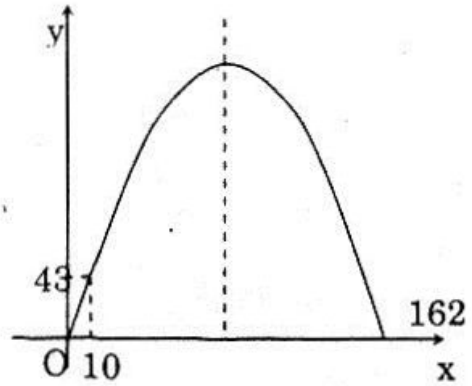
c) Độ cao cực đại xấp xỉ bằng 8,794m.

Bài 12. (Bài toán cổng Ac-xơ (Arch))

Khi du lịch đến thành phố Xanh lu-i (Mĩ) bạn sẽ thấy một cái cổng lớn hình parabol hướng bề lõm về phía dưới. Đó là cổng Ac-xơ. Giả sử lập một hệ tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như hình vẽ dưới đây (x, y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí (162; 0). Biết một điểm M trên cổng có tọa độ là (10; 43).

a) Tìm hàm số có đồ thị là parabol nói trên (các hệ số chính xác đến hàng phần nghìn).

b) Tính chiều cao của cổng (Tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất, tính chính xác đến hàng đơn vị).



Giải

a) Hàm số cần tìm có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, thỏa mãn:

$f(0) = c = 0$, $f(10) = 100a + 10b = 43$; $f(162) = 162^2a + 162b = 0$ hay $162a + b = 0$

Từ đó ta tìn được $a = -\frac{43}{1520}$; $b = \frac{3483}{760}$; $c = 0$, ta suy ra hàm số cần tìm.

b) $h = f\left(\frac{162}{2}\right) = f(81) \approx 186$ (m).

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 13. Tìm giao điểm của parabol $y = -x^2 + 2x + 1$ với đồ thị hàm số:

$y = x^4 - 2x^2 + 3$.

Bài 14. Chứng minh rằng parabol $y = x^2 - 2x - \frac{5}{4}$ và đường thẳng $y = -2mx - m$ luôn có điểm chung.

Bài 15. Tìm tham số a để phương trình:

$|2x^2 - 3x - 2| = 5a - 8x - 2x^2$, có nghiệm duy nhất.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 13. Tọa độ giao điểm của hai đường là: (1; 2).

Bài 14. Xét phương trình hoành độ giao điểm chung

$$x^2 - 2x - \frac{5}{4} = -2mx - m$$

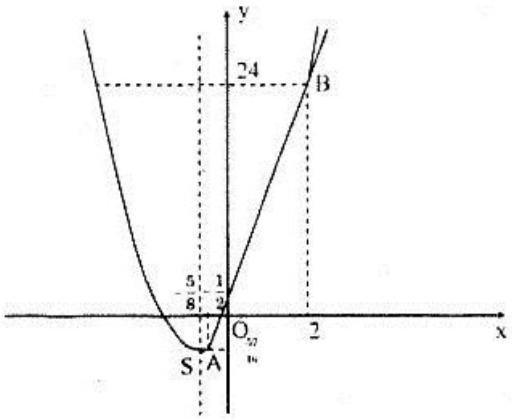
Có: $\Delta = 4(m - 1)^2 - 4(m - 1) + 1 = (2m - 1)^2 \geq 0 \ \forall m \in R$

Từ đấy ta suy ra hai đường đã cho luôn có điểm chung.

Bài 15. Ta vẽ đồ thị hàm số

$$y = |2x^2 - 3x - 2| + 2x^2 + 8x$$

Đồ thị ở hình vẽ sau:



Do đó, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ y = 5a đi qua S.

$\Leftrightarrow 5a = -\frac{57}{16} \Leftrightarrow a = -\frac{57}{80}$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

I. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Với mỗi câu sau đây. Hãy chọn phần kết luận mà em cho là đúng:

a) Trên khoảng (–1; 1), hàm số $y = -2x + 5$

(A) Đồng biến (B) Nghịch biến;

(C) Cả kết luận (A) và (B) đều sai.

b) Trên khoảng (0; 1), hàm số $y = x^2 + 2x - 3$

(A) Đồng biến (B) Nghịch biến;

(C) Cả kết luận (A) và (B) đều sai.

c) Trên khoảng (–2; 1) hàm số $y = x^2 + 2x - 3$

(A) Đồng biến (B) Nghịch biến;

(C) Cả kết luận (A) và (B) đều sai.

Giải

a) Kết luận (B); **b)** Kết luận (A); **c)** Kết luận (C).

Bài 2. a) Tìm các hàm số lẻ trong các hàm số bậc nhất $y = ax + b$.

b) Tìm các hàm số chẵn trong các hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$.

Giải

a) Hiển nhiên tập xác định D của $y = ax + b$ là đối xứng.

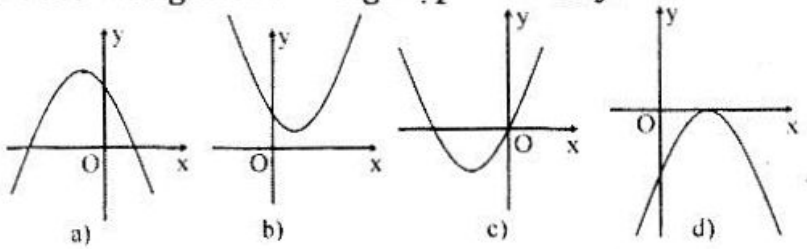
Đặt $f(x) = ax + b$ là hàm số lẻ

$\Rightarrow \quad \forall x \in D, f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow ax + b = ax - b \Leftrightarrow b = 0.$

Vậy các hàm số lẻ trong tập hợp các hàm số bậc nhất là hàm số $y = ax$.

b) Tương tự ta tìm được các hàm số chẵn trong các hàm số bậc hai là các hàm số có dạng $y = ax^2 + b$.

Bài 3. Dựa vào đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$. Hãy xác định dấu của các hệ số a, b và c trong mỗi trường hợp dưới đây:



Hướng dẫn:

a) Vì bề lõm của parabol quay xuống dưới nên $a < 0$.

Lại vì $-\dfrac{b}{2a} < 0$ nên $-\dfrac{b}{2} > 0 \Rightarrow b < 0$.

Do parabol cắt Oy tại điểm có tung độ dương nên $c > 0$.

b) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$. c) $a > 0$; $b > 0$; $c = 0$.

d) $a < 0$; $b > 0$; $c < 0$.

Bài 4. Trong mỗi trường hợp cho dưới đây, hãy vẽ đồ thị hàm số của các hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ rồi xác định tọa độ giao điểm của chúng.

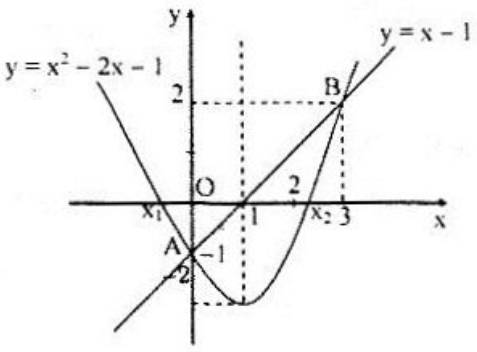
a) $y = x - 1$ và $y = x^2 - 2x - 1$;

b) $y = -x + 3$ và $y = -x^2 - 4x + 1$;

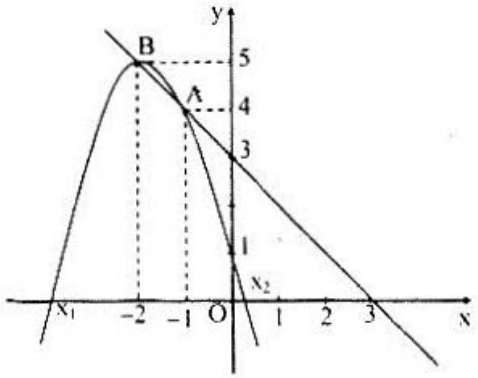
c) $y = 2x - 5$ và $y = x^2 - 4x - 1$.

Hướng dẫn

a) Tọa độ giao điểm là: A(0; –1), B(3; 2).



b)



Tọa độ giao điểm (x; y) là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = -x^2 - 4x - 1 \end{cases}$

Giải ra ta đi đến có hai giao điểm: A(–1; 4), B(–2; 5).

c) Tọa độ giao điểm là: $A(3 - \sqrt{5}\,;\, 1 - 2\sqrt{5})$ và $B(3 + \sqrt{5}\,;\, 1 + 2\sqrt{5})$.

Bài 5. Xác định các hệ số a, b và c để cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi x = 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Giải

Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$, ta có $f(1) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ và $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$.

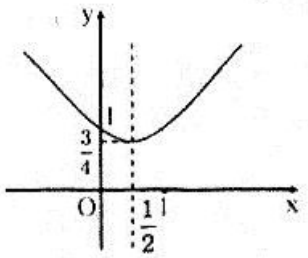
Từ những phương trình trên ta đi đến kết quả a = 1, b = –1, c = 1.

Hàm số cần tìm có dạng: $y = x^2 - x + 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

Đồ thị



Bài 6. Vẽ đồ thị các hàm số sau và lập bảng biến thiên của nó:

a) $y = \left|\frac{3}{2}x - 2\right|$;

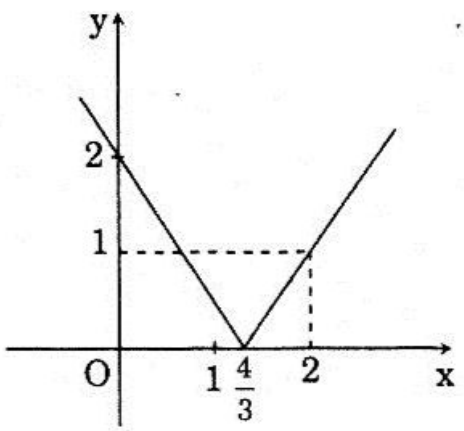
b) $y = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x < 0 \\ x^2 - x & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$;

c) $y = \left|\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}\right|$;

d) $y = x|x| - 2x - 1$.

Giải

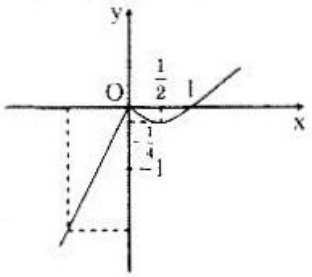
a) • Đồ thị



• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

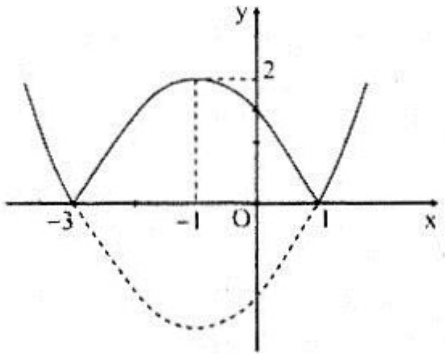
b) • Đồ thị:



• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

c) • Đồ thị

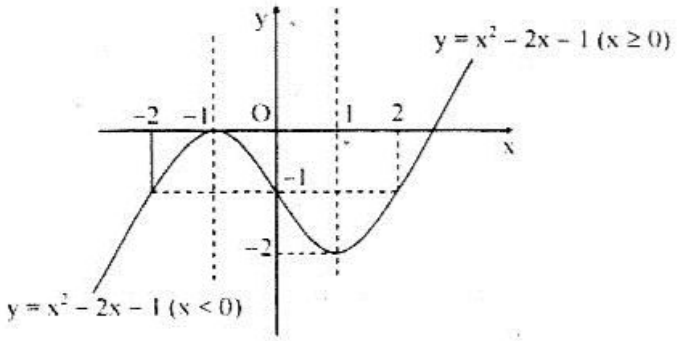


• Bảng biến thiên

x	$-\infty$		−3		−1		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

d) Ta viết lại hàm số dưới dạng: $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x^2 - 2x - 1 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

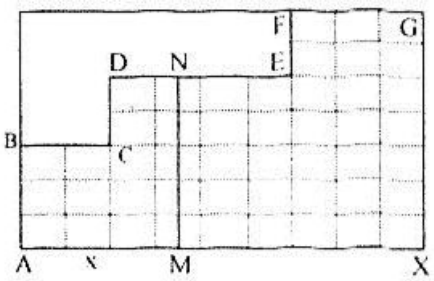
Từ đó ta có đồ thị ở hình vẽ sau.



Từ đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↗	$+\infty$

Bài 7. Trên hình bên, điểm M chuyển động trên đoạn thẳng AX. Từ M, kẻ đường thẳng song song với AB, cắt một trong ba đoạn thẳng BC, DE, FG tại điểm N. Gọi S là diện tích của miền tô đậm nằm ở trên trái MN. Gọi độ dài đoạn AM là x ($0 \le x \le 9$). Khi đó S là một hàm số của biến x. Hãy nêu biểu thức xác định hàm số S(x).



Hướng dẫn

Nếu $0 \le x \le 2$ thì hiển nhiên $S(x) = 3x$.

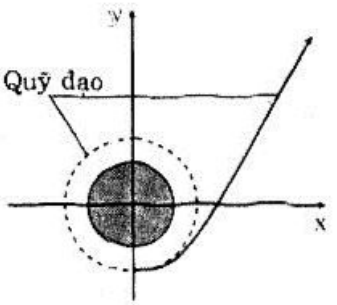
Nếu $2 \le x \le 6$ thì $S(x) = 6 + 5(x - 2) = 5x - 4$.

Nếu $6 \le x \le 9$ thì $S(x) = 26 + 7(x - 6) = 7x - 16$.

$$\text{Vậy } S(x) = \begin{cases} 3x & \text{nếu } 0 \le x < 2 \\ 5x - 4 & \text{nếu } 2 \le x < 6 \\ 7x - 16 & \text{nếu } 6 \le x \le 9 \end{cases}$$

Bài 8. Bài toán tàu vũ trụ.

Khi một con tàu vũ trụ được phóng lên Mặt Trăng, trước hết nó sẽ bay vòng quanh Trái Đất. Sau đó, đến một thời điểm thích hợp, động cơ bắt đầu hoạt động đưa con tàu bay theo quỹ đạo là một nhánh hình parabol lên Mặt Trăng (trong hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên, x và y tính bằng nghìn kilômét). Biết rằng khi động cơ bắt đầu hoạt động, $x = 0$ thì $y = -7$. Sau đó $y = -4$ khi $x = 10$ và $y = 5$ khi $x = 20$.



a) Tìm hàm số có đồ thị là nhánh parabol nói trên.

b) Theo lịch trình, để đến được Mặt Trăng, con tàu phải đi qua điểm (100; y) với $y = 294 \pm 1{,}5$. Hỏi điều kiện đó có được thỏa mãn hay không?

Hướng dẫn

a) Ta cần tìm hàm số dạng $y = ax^2 + bx + c = f(x)$ thỏa $f(0) = c = -7$; $f(10) \approx 4$; $f(20) = 5$. Từ đó ta có $a = 0{,}03$ và $b = 0$. Hàm số cần tìm là $y = 0{,}03x^2 - 7$.

b) Theo điều kiện, khi $x = 100$ thì $y = 294 \pm 1{,}5$ nghĩa là:

$$y \in [292{,}5;\ 295{,}5].$$

Ta thấy $f(100) = 293$ thỏa mãn điều kiện đó.

II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{14 - x} - \sqrt{14 + x}$;

b*) $y = \dfrac{\sqrt{2x + 3}}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 120}$.

Bài 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \dfrac{x^{10} - x^8 + 1}{x^2 - 1}$; b) $y = \sqrt{14 - x} - \sqrt{14 + x}$.

Bài 3. Xét sự biến thiên của các hàm số trên các khoảng đã chỉ ra:

a) $y = \dfrac{5}{x - 2}$ $(2; +\infty)$; b) $y = x^3 + 4x + 5$ $(-\infty; +\infty)$.

Bài 4. Tìm parabol $y = ax^2 + bx + c$ biết đạt giá trị bé nhất tại $x = 1$ và giá trị bé nhất là -4 và parabol đi qua điểm $A(5; 12)$.

III. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. a) $D = [-14; 14]$; b) $D = \left[-\dfrac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{1\}$.

Bài 2. a) Hàm số $y = \dfrac{x^{10} - x^8 + 1}{x^2 - 1}$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = \sqrt{14 - x} - \sqrt{14 + x}$ là hàm số lẻ.

Bài 3. a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

b) Hàm số $y = x^3 + 4x + 5$ đồng biến trên R.

Bài 4. Hàm số cần tìm là $y = x^2 - 2x - 3$.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Đặt $D = D_f \cap D_g$.

- Mệnh đề chứa biến $f(x) = g(x)$ được gọi là phương trình một ẩn; x gọi là ẩn. Tập D được gọi là tập xác định của phương trình.
- Số x_0 gọi là nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu nó thỏa mãn tập xác định của phương trình và mệnh đề $f(x_0) = g(x_0)$ là đúng.
- Hai phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ và $f_2(x) = g_2(x)$ được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm. Khi đó ta viết:

$$f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

2. Các phép biến đổi tương đương một phương trình

- Thực hiện các phép toán đại số trong từng vế nhưng không làm thay đổi tập xác định của phương trình.
- Thêm vào hai vế của phương trình cùng một biểu thức xác định với mọi giá trị của ẩn thỏa mãn tập xác định của phương trình.
- Nhân hai vế của phương trình với cùng một biểu thức xác định và khác không với mọi giá trị của ẩn thỏa mãn tập xác định của phương trình.
- Bình phương hai vế của phương trình có hai vế luôn cùng dấu với mọi giá trị của ẩn thỏa mãn tập xác định của phương trình.

3. Phương trình hệ quả

- Cho phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ có tập nghiệm là T_1. Phương trình $f_2(x) = g_2(x)$ (có tập nghiệm là T_2) được gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ nếu $T_2 \supset T_1$. Khi đó ta viết:

$$f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$$

- Khi bình phương hai vế một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

Hướng dẫn

Phương trình	Điều kiện xác định của phương trình	Tập nghiệm
a) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$	$x \geq 0$ và $x \leq 0$, hay $x = 0$.	$\{0\}$
b) $3x - \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + 6$	$x \geq 2$ và $x \leq 2$, hay $x = 2$.	$\{2\}$
c) $\dfrac{\sqrt{3-x}}{x-3} = x + \sqrt{x-3}$	$x \geq 3$ và $x \neq 3$ và $x \leq 3$, hay không tồn tại giá trị nào của x.	$\varnothing$
d) $x + \sqrt{x-1} = \sqrt{-x}$	$x \geq 1$ và $x \leq 0$, hay không tồn tại giá trị nào của x.	$\varnothing$

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $x + \sqrt{x-1} = 2 + \sqrt{x-1}$; b) $x + \sqrt{x-1} = 0{,}5 + \sqrt{x-1}$;

c) $\dfrac{x}{2\sqrt{x-5}} = \dfrac{3}{\sqrt{x-5}}$; d) $\dfrac{x}{2\sqrt{x-5}} = \dfrac{2}{\sqrt{x-5}}$.

Hướng dẫn

a) Điều kiện xác định của phương trình: $x - 1 \geq 0$ hay $x \geq 1$.

Đưa phương trình về dạng tương đương: $x = 2$ thỏa mãn $x \geq 1$.

Vậy tập nghiệm là $\{2\}$.

b) Điều kiện xác định của phương trình: $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.

Đưa phương trình về dạng tương đương, ta có: $x = \dfrac{1}{2} < 1$.

Suy ra phương trình vô nghiệm.

c) $x = 6$.

d) Phương trình vô nghiệm.

Bài 3. Giải các phương trình sau:

a) $x + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2x-1}{x-1}$; b) $x + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x-3}{x-2}$;

c) $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x-3} = 0$; d) $(x^2 - x - 2)\sqrt{x+1} = 0$.

Hướng dẫn

a) Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq 1$. Đưa phương trình về dạng tương đương:

$$x + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} + \frac{1}{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \neq 1.$$

Vậy phương trình có duy nhất nghiệm $x = 2$.

b) Phương trình vô nghiệm.

c) Phương trình có duy nhất nghiệm $x = 3$.

d) Phương trình có hai nghiệm $x = -1$ hoặc $x = 2$.

Bài 4. Giải các phương trình sau bằng phương pháp bình phương hai vế của phương trình:

a) $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x}$; b) $\sqrt{x-1} = x-3$;

c) $2|x-1| = x+2$; d) $|x-2| = 2x-1$.

Hướng dẫn

a) $\sqrt{x-3} = \sqrt{9-2x} \Rightarrow x-3 = 9-2x \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow x = 4$.

Thử lại bằng cách thay vào phương trình ta có ngay $x = 4$ là nghiệm.

b) $\sqrt{x-1} = x-3 \Rightarrow x-1 = x^2-6x+9 \Leftrightarrow x^2-7x+10 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = 5$.

Thử lại vào phương trình ta thấy chỉ $x = 5$ là nghiệm của phương trình.

c) $2|x-1| = x+2 \Rightarrow 4(x^2-2x+1) = x^2+4x+4 \Leftrightarrow 3x^2-12x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 4$.

Thử lại ta có cả hai đều là nghiệm của phương trình.

d) $|x-2| = 2x-1 \Rightarrow x^2-4x+4 = 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -1$.

Thử lại, ta thấy $x = 1$ nghiệm đúng phương trình đã cho.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 5. Kiểm tra lại rằng các phép biến đổi sau đây làm mất nghiệm của phương trình.

a) Chia cả hai vế của phương trình $(x+4)(x^2-3x+2) = x^2-3x+2$ cho biểu thức x^2-3x+2.

b) Chia cả hai vế của phương trình $(x+9)\sqrt{x-7} = (\sqrt{x-7})^3$ cho $\sqrt{x-7}$.

Bài 6. Trong các phép biến đổi sau, phép biến đổi nào cho ta phương trình tương đương, phép biến đổi nào cho ta phương trình không tương đương.

a) Lược bỏ số hạng $\dfrac{4}{x+1}$ ở cả hai vế của phương trình:

$$x^2+1+\frac{4}{x+1} = -2x+\frac{4}{x+1}$$

b) Lược bỏ số hạng $\dfrac{8}{x+2}$ ở cả hai vế của phương trình:

$$x^2+1+\frac{8}{x+2} = 2x+\frac{8}{x+2}$$

Bài 7. Tìm điều kiện xác định của phương trình hai ẩn sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

$$\sqrt{-4x^2-(y+1)^2} + xy = (x+1)(y+1).$$

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 5.

a) Dễ kiểm tra phương trình đều có tập nghiệm là: $\{-3; 1; 2\}$. Sau khi chia cả hai vế của phương trình đầu cho x^2-3x+2 thu được phương trình có tập nghiệm là $\{-3\}$.

b) Tập nghiệm của phương trình ban đầu là {7}. Tập nghiệm của phương trình sau khi chia cho $\sqrt{x-7}$ là tập ∅.

Bài 6. a) Không là phép biến đổi thành phương trình tương đương.

b) Là phép biến đổi thành phương trình tương đương.

Bài 7. Điều kiện xác định của phương trình là: $x = 0$ và $y = -1$. Thử trực tiếp vào phương trình ta thu được cặp số $(0; -1)$ là nghiệm của phương trình.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

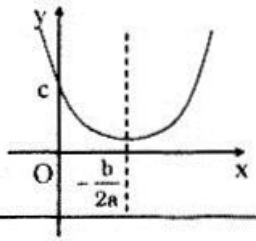
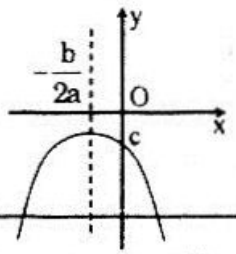
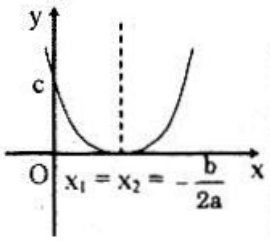
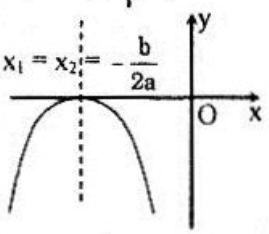
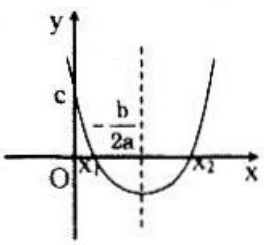
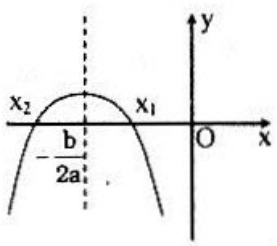
1. Giải, biện luận phương trình $ax + b = 0$

- $a \neq 0$: phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$.
- $a = 0$ và $b \neq 0$: phương trình vô nghiệm.
- $a = 0$ và $b = 0$: phương trình có tập nghiệm là tập R.

2. Định nghĩa

Phương trình có dạng: $ax^2 + bx + c = 0$ (1); a, b và c là các hằng số thực, $a \neq 0$, x là ẩn số, được gọi là phương trình bậc hai một ẩn.

3. Công thức nghiệm và minh họa bằng đồ thị

Dấu của Δ và sự có nghiệm	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ Phương trình (1) vô nghiệm		
$\Delta = b^2 - 4ac = 0$ Phương trình có nghiệm kép. $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$		
$\Delta = b^2 - 4ac > 0$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2. $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$		

4. Giải, biện luận phương trình (1)

• $a \neq 0$: Nếu $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$), (1) vô nghiệm.

Nếu $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$), (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$), (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

• $a = 0$, (1) trở thành $bx + c = 0$ suy ra việc giải biện luận (1) trở thành việc giải và biện luận phương trình bậc nhất trong điều kiện để $a = 0$.

5. Dấu các nghiệm của phương trình bậc hai

+ Nếu đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì nó có thể phân tích thành nhân tử: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

+ Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là các nghiệm của phương trình $x^2 - Sx + P = 0$.

+ Cho phương trình: $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 \leq x_2$). Kí hiệu $S = -\frac{b}{a}$ và $P = \frac{c}{a}$. Khi đó:

  • Nếu $P < 0$ thì $x_1 < 0 < x_2$.

  • Nếu $P > 0$ và $S > 0$ thì $0 < x_1 \leq x_2$.

  • Nếu $P > 0$ và $S < 0$ thì $x_1 \leq x_2 < 0$.

6. Số nghiệm của phương trình trùng phương

+ Phương trình trùng phương là phương trình có dạng:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0) \qquad (2)$$

+ Đặt $x^2 = y$ ($y \geq 0$) ta đi đến phương trình bậc hai với ẩn y:

$$ay^2 + by + c = 0 \qquad (3)$$

Do đó muốn biết số nghiệm của (2) ta chỉ cần biết số nghiệm phương trình (3) và dấu của các nghiệm đó.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Xem các bài giải sau đây và cho biết bài giải đó đúng hay sai? Vì sao ?

a) $\frac{(x-2)(x-1)}{\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}(x-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} = 0$ hoặc $x - 1 = 0$

• $\frac{x-2}{\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$

• $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \{1; 2\}$.

b) $\sqrt{x^2 - 2} = 1 - x \Leftrightarrow x^2 - 2 = (1 - x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2 = 1 - 2x + x^2$

$$\Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \frac{3}{2}$.

Giải

a) Sai, vì giá trị $x = 1$ làm cho mẫu thức bằng không, tức là $x = 1$ không thỏa mãn điều kiện xác định của phương trình đã cho.

b) Sai, vì phép bình phương hai vế cho ta phương trình hệ quả bởi vậy cần phải thử lại kết quả tìm được. Do đó sau khi thử lại ta thấy $x = \frac{3}{2}$ không là nghiệm của phương trình ban đầu.

Bài 2. Giải biện luận các phương trình:

a) $(m^2 + 2)x - 2m = x - 3$; b) $m(x - m) = x + m - 2$;

c) $m(x - m + 3) = m(x - 2) + 6$. d) $m^2(x - 1) + m = x(3m - 2)$;

Giải

a) Đưa phương trình về dạng: $(m^2 + 1)x = 2m - 3$.

Nhận thấy $m^2 + 1 \neq 0$ với mọi $m \in R$ nên phương trình có duy nhất nghiệm $x = \frac{2m - 3}{m^2 + 1}$ (với mọi $m \in R$).

b) Đưa phương trình về dạng $(m - 1)x = (m - 1)(m + 2)$ (1). Vậy:

- Nếu $m = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow$ $0x = 0$. Phương trình có tập nghiệm là R.
- Nếu $m \neq 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{(m - 1)(m + 2)}{m - 1} = m + 2$$

c) Do $m(x - m + 3) = m(x - 2) + 6 \Leftrightarrow 0x = m^2 - 5m + 6$

$\Leftrightarrow 0x = (m - 2)(m - 3)$

- Với $m \neq 2$ và $m \neq 3$, phương trình vô nghiệm.
- Với $m = 2$ hoặc $m = 3$, phương trình có tập nghiệm là tập R.

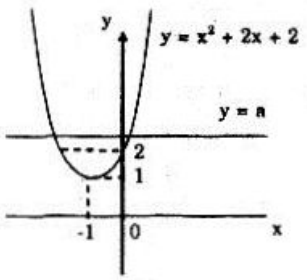
d) Do $m^2(x - 1) + m = x(3m - 2) \Leftrightarrow (m^2 - 3m + 2)x = m^2 - m$

$\Leftrightarrow (m - 1)(m - 2)x = m(m - 1)$

Nên ta có các kết luận sau:

- Với $m \neq 1$ và $m \neq 2$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{m}{m - 2}$.
- Với $m = 1$, phương trình có tập nghiệm là R.
- Với $m = 2$, phương trình vô nghiệm.

Bài 3. Dựa vào hình bên, tìm các giá trị của a để phương trình: $3x + 2 = -x^2 + x + a$ có nghiệm dương. Khi đó, hãy tìm nghiệm dương của phương trình.



Giải

Phương trình đã cho tương đương với: $x^2 + 2x + 2 = a$.

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy phương trình ban đầu có nghiệm dương khi và chỉ khi $a > 2$. Lúc đó nghiệm dương là $x = -1 + \sqrt{4a - 7}$

Bài 4. Giải và biện luận các phương trình:

a) $(m - 1)x^2 + 3x - 1 = 0$; **b)** $x^2 - 4x + m - 3 = 0$.

Giải

a) Khi $m = 1$ phương trình trở thành $3x - 1 = 0$ có một nghiệm $x = \frac{1}{3}$.

Khi $m \neq 1$, ta có phương trình bậc hai với biệt số

$$\Delta = 9 + 4(m - 1) = 4m + 5.$$

Với $m > -\frac{5}{4}$ thì $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4m + 5}}{2(m - 1)}$$

Với $m = -\frac{5}{4}$ thì $\Delta = 0$, phương trình có một nghiệm (kép) $x = \frac{2}{3}$.

Với $m < -\frac{5}{4}$ thì $\Delta < 0$, phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

- Khi $m = 1$ phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{3}$.
- Khi $m > -\frac{5}{4}$ và $m \neq 1$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{4m + 5}}{2(m - 1)}$$

- Khi $m = -\frac{5}{4}$ phương trình có một nghiệm (kép) $x = \frac{2}{3}$.
- Khi $m < -\frac{5}{4}$, phương trình vô nghiệm.

b) Ta có: $\Delta' = 4 - m + 3 = 7 - m$.

- Nếu $7 - m < 0 \Leftrightarrow m > 7$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $7 - m = 0 \Leftrightarrow m = 7$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 2$.
- Nếu $7 - m > 0 \Leftrightarrow m < 7$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2 - \sqrt{7 - m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{7 - m}$.

Kết luận:
- $m > 7$, phương trình vô nghiệm.
- $m = 7$, phương trình có duy nhất nghiệm $x_1 = x_2 = 2$.
- $m < 7$, phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 2 - \sqrt{7 - m}$; $x_2 = 2 + \sqrt{7 - m}$.

Bài 5. a) Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1 và x_2. Chứng minh rằng $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

b) Áp dụng: phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

$f(x) = -2x^2 - 7x + 4$; $g(x) = (\sqrt{2} + 1)x^2 - 2(\sqrt{2} + 1)x + 2$.

Giải

a) Áp dụng định lí vi-ét: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ ta có:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a}) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

$$= a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = a(x - x_1)(x - x_2)$$

b) • $f(x) = -2x^2 - 7x + 4$. Xét phương trình $f(x) = 0$ ta được hai nghiệm $x_1 = -4$ và $x_2 = \frac{1}{2}$.

Do đó: $f(x) = -2(x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 4)(1 - 2x)$.

• $g(x) = (\sqrt{2} + 1)x^2 - 2(\sqrt{2} + 1)x + 2$. Xét phương trình $g(x) = 0$ ta có hai nghiệm $x_1 = \sqrt{2}$ và $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}$.

Do đó: $g(x) = (\sqrt{2} + 1)(x - \sqrt{2})\left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}\right)$

$= (x - \sqrt{2})[(\sqrt{2} + 1)x - \sqrt{2}]$.

Bài 6. Không giải phương trình $x^2 - 2x - 15 = 0$, hãy tính:

a) Tổng các bình phương hai nghiệm của nó.

b) Tổng các lập phương hai nghiệm của nó.

c) Tổng các lũy thừa bậc bốn hai nghiệm của nó.

Giải

Ta có $\Delta' = 16 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt, gọi hai nghiệm là x_1 và x_2. Theo định lí Vi-et ta có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1.x_2 = -15$.

a) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 4 + 30 = 34$.

b) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1.x_2.(x_1 + x_2) = 8 + 90 = 98$.

c) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1.x_2)^2 = 34^2 - 2(-15)^2 = 706$.

Bài 7. Trong các khẳng định sau đây có duy nhất khẳng định đúng. Hãy chọn khẳng định đó. Phương trình: $(\sqrt{3} - 1)x^4 + x^2 + 2(1 - \sqrt{3}) = 0$.

(A) Vô nghiệm;

(B) Có hai nghiệm $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{33 - 16\sqrt{3}} - 1)}$;

(C) Có bốn nghiệm $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{33 - 16\sqrt{3}} - 1)}$ và $x = \pm\sqrt{3}$;

(D) Có hai nghiệm $x = \pm\sqrt{3}$.

Giải

Thay $x = \sqrt{3}$ vào phương trình ta có ngay $x = \sqrt{3}$ không là nghiệm, do vậy các khẳng định (C) và (D) là sai. Khẳng định (A) cũng sai vì phương trình đã cho có hệ số $a = \sqrt{3} - 1 > 0$, $c = 2(1 - \sqrt{3}) < 0$ điều này chứng tỏ phương trình bậc hai $(\sqrt{3} - 1)y^2 + y + 2(1 - \sqrt{3}) = 0$ có một nghiệm dương hay phương trình ban đầu phải có hai nghiệm phân biệt.

Vậy chỉ có khẳng định (B) là đúng (vì có duy nhất một khẳng định đúng).

LUYỆN TẬP

Bài 8. Giải và biện luận các phương trình sau (m là tham số):

a) $2(m + 1)x - m(x - 1) = 2m + 3$; **b)** $m^2(x - 1) + 3mx = (m^2 + 3)x - 1$;

c) $3(m + 1)x + 4 = 2x + 5(m + 1)$; **d)** $m^2x + 6 = 4x + 3m$.

Hướng dẫn

a) Phương trình đã cho được viết lại dưới dạng tương đương:

$$x(m + 2) = m + 3$$

- Nếu $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m + 3}{m + 2}$.
- Nếu $m = -2$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Đưa phương trình về dạng tương đương:

$$3x(m - 1) = (m - 1)(m + 1)$$

- Nếu $m \neq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m + 1}{3}$.
- Nếu $m = 1$, phương trình có tập nghiệm là R.

c) Đưa phương trình về dạng tương đương:

$$(3m + 1)x = 5m + 1$$

- Nếu $m \neq -\dfrac{1}{3}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{5m + 1}{3m + 1}$.
- Nếu $m = -\dfrac{1}{3}$ thì phương trình vô nghiệm.

d) Đưa phương trình về dạng tương đương: $x(m^2 - 4) = 3m - 6$

- Nếu $m \neq 2$ và $m \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3}{m + 2}$.
- Nếu $m = 2$ thì phương trình có tập nghiệm là R.
- Nếu $m = -2$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 9. a) Tìm các giá trị của p để phương trình sau vô nghiệm:

$$(p + 1)x - (x + 2) = 0$$

b) Tìm p để phương trình $p^2x - p = 4x - 2$ có vô số nghiệm.

Hướng dẫn

a) Ta có: $(p + 1)x - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow px = 2$

Suy ra phương trình vô nghiệm khi $p = 0$.

b) Ta có: $p^2x - p = 4x - 2 \Leftrightarrow x(p-2)(p+2) = p - 2$

$\Rightarrow$ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} (p-2)(p+2) = 0 \\ p - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p = 2.$

Bài 10. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình sau chính xác đến hàng phần trăm.

a) $x^2 - 5,6x + 6,4 = 0$; b) $\sqrt{2}x^2 + 4\sqrt{3}x - 2\sqrt{2} = 0$.

Giải

a) $\Delta = 5,6^2 - 4.6,4 = 31,36 - 25,64 = 5,72$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{5,6 - \sqrt{5,72}}{2} \approx 1,60; \quad x_2 = \frac{5,6 + \sqrt{5,72}}{2} = 4,00.$$

b) Viết phương trình dưới dạng tương đương:

$$2x^2 + 4\sqrt{6}x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{6}x - 2 = 0$$

$\Delta' = 6 + 2 = 8$, phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = -\sqrt{6} - \sqrt{8} \approx -5,28; \quad x_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{8} \approx 0,38.$$

Bài 11. Tìm độ dài các cạnh của một tam giác vuông, biết rằng cạnh dài nhất hơn cạnh dài thứ hai là 2m, cạnh dài thứ hai hơn cạnh ngắn nhất là 23m.

Hướng dẫn

Gọi độ dài cạnh ngắn nhất là x (m) (điều kiện là $x > 0$).

Sử dụng giả thiết và định lí Pitago ta có phương trình:

$$x^2 - 4x - 96 = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm $x_1 = 12$ và $x_2 = -8 < 0$.

Do đó $x_1 = 12$ thỏa điều kiện.

Vậy độ dài các cạnh là: 12m, 35m, 37m.

Bài 12. Giải và biện luận các phương trình sau (m và k là tham số).

a) $(m - 1)x^2 + 7x - 12 = 0$; b) $mx^2 - 2(m + 3)x + m + 1 = 0$;

c) $[(k + 1)x - 1](x - 1) = 0$; d) $(mx - 2)(2mx - x + 1) = 0$.

Giải

a) • $m = 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{12}{7}$.

• $m \neq 1$, $\Delta = 49 + 48(m - 1) = 1 + 48m$

+ Nếu $1 + 48m < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{48}$, phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $1 + 48m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{48}$, phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = -\frac{7}{2\left(-\frac{1}{48} - 1\right)} = \frac{24}{7}$$

+ Nếu $1 + 48m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{48}$, phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-7 - \sqrt{1 + 48m}}{2(m - 1)}$; $x_2 = \frac{-7 + \sqrt{1 + 48m}}{2(m - 1)}$.

Tóm lại: • $m = 1$, phương trình có một nghiệm $x = \frac{12}{7}$.

• $m = -\frac{1}{48}$, phương trình có nghiệm $x = \frac{24}{7}$.

• $m < -\frac{1}{48}$, phương trình vô nghiệm.

• $m > -\frac{1}{48}$ và $m \neq 1$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{1 + 48m}}{2(m - 1)}; \quad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{1 + 48m}}{2(m - 1)}.$$

b) • $m = 0$, phương trình trở thành: $-6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$.

• $m \neq 0$, $\Delta' = (m + 3)^2 - m^2 - m = 5m + 9$

+ Nếu $5m + 9 < 0 \Leftrightarrow 5m < -9 \Leftrightarrow m < -\frac{9}{5}$

$\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $m = -\frac{9}{5}$, phương trình có nghiệm kép $x = \frac{-\frac{9}{5} + 3}{-\frac{9}{5}} = -\frac{2}{3}$.

+ Nếu $m > -\frac{9}{5}$ $(m \neq 0)$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$x = \frac{m + 3 \pm \sqrt{5m + 9}}{m}$$

c) • $k = -1$, phương trình có nghiệm $x = 1$.

• $k \neq -1$, phương trình có nghiệm $x = 1$, $x = \frac{1}{k + 1}$.

$\Rightarrow$ $k = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 1$.

$k \neq 0$, $k \neq -1$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x = 1$, $x = \frac{1}{k + 1}$.

Tóm lại: $k = -1$ hoặc $k = 0$ phương trình có nghiệm $x = 1$.

$k \neq -1$ và $k \neq 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x = 1, \quad x = \frac{1}{k + 1}.$$

d) • $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 1$.

- $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ phương trình có các nghiệm: $x = \dfrac{2}{m}$; $x = \dfrac{1}{1-2m}$

$\Rightarrow$ $m = \dfrac{2}{5}$ phương trình có một nghiệm $x = 5$.

$m \neq 0$, $m \neq \dfrac{1}{2}$, $m \neq \dfrac{2}{5}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$x = \dfrac{2}{m}$; $x = \dfrac{1}{1-2m}$.

- $m = \dfrac{1}{2}$, phương trình có một nghiệm $x = 4$.

Bài 13. Biện luận số giao điểm của hai parabol $y = -x^2 - 2x + 3$ và $y = x^2 - m$ theo tham số m.

Giải

Số giao điểm của hai parabol đúng bằng số nghiệm của phương trình:

$-x^2 - 2x + 3 = x^2 - m$ hay $2x^2 + 2x - m - 3 = 0$

Đây là phương trình bậc hai có biệt thức thu gọn $\Delta' = 2m + 7$.

Do đó: - Khi $m < -3,5$, phương trình vô nghiệm, suy ra hai parabol không có điểm chung.

- Khi $m = -3,5$, phương trình có một nghiệm (kép), suy ra hai parabol có một điểm chung.
- Khi $m > -3,5$, phương trình có hai nghiệm phân biệt, suy ra hai parabol có hai điểm chung.

Bài 14. Tìm các giá trị của m để phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1^3 + x_2^3 = 40$.

Giải

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $\Delta' = 4 - (m - 1) = 5 - m \geq 0$ hay $m \leq 5$. Khi đó $x_1 + x_2 = 4$ và $x_1.x_2 = m - 1$.

$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1.x_2(x_1 + x_2) = 4^3 - 12(m - 1) = 76 - 12m$

Vậy $x_1^3 + x_2^3 = 40 \Leftrightarrow 76 - 12m = 40 \Leftrightarrow 12m = 36 \Leftrightarrow m = 3$.

Bài 15. Giải phương trình $x^2 + (4m + 1)x + 2(m - 4) = 0$, biết rằng nó có hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm nhỏ bằng 17.

Giải

Do phương trình có hai nghiệm phân biệt nên

$\Delta = (4m + 1)^2 - 8(m - 4) > 0$

$\Leftrightarrow$ $16m^2 + 33 > 0$ đúng $\forall$ giá trị của m

Khi đó phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{-4m - 1 - \sqrt{16m^2 + 33}}{2}; \quad x_2 = \frac{-4m - 1 + \sqrt{16m^2 + 33}}{2}.$$

Dễ thấy $x_2 > x_1$, do đó:

$$x_2 - x_1 = 17 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{16m^2 + 33}}{2} = 17 \Leftrightarrow \sqrt{16m^2 + 33} = 17$$

$$\Leftrightarrow 16m^2 = 256 \Leftrightarrow m^2 = \frac{256}{16} = 16 \Rightarrow m = \pm 4.$$

- Với $m = 4$, phương trình có hai nghiệm là:

$$x_1 = \frac{-17 - \sqrt{289}}{2} = -17; \quad x_2 = \frac{-17 + \sqrt{289}}{2} = 0.$$

- Với $m = -4$, phương trình có hai nghiệm là:

$$x_1 = \frac{15 - \sqrt{289}}{2} = -1; \quad x_2 = \frac{15 + \sqrt{289}}{2} = 16.$$

Bài 16. Không giải phương trình, hãy xét xem mỗi phương trình trùng phương sau có bao nhiêu nghiệm.

a) $x^4 + 8x^2 + 12 = 0$; **b)** $-1,5x^4 - 2,6x^2 + 1 = 0$;

c) $(1 - \sqrt{2})x^4 + 2x^2 - 1 - \sqrt{2} = 0$; **d)** $-x^4 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 = 0$.

Giải

a) Ta thấy: $x^2 \geq 0\ \forall x$, $x^4 \geq 0\ \forall x$ nên $x^4 + 8x^2 + 12 \geq 12 > 0, \forall x$.

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

b) Do $-1,5$ và 1 trái dấu nên phương trình $-1,5y^2 - 2,6y + 1 = 0$ có một nghiệm âm, một nghiệm dương, do đó phương trình trùng phương đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

c) Xét phương trình: $(1 - \sqrt{2})y^2 + 2y - 1 - \sqrt{2} = 0$

Có: $\Delta' = 1 + (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 + 1 - 2 = 0$, phương trình này có nghiệm kép $y_1 = y_2 = -\frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} > 0$. Do đó phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt.

d) Xét phương trình: $-y^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \sqrt{3} - \sqrt{2} > 0 \end{array}\right.$

Do đó phương trình: $-x^4 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Bài 17. Cho phương trình: $kx^2 - 2(k + 1)x + k + 1 = 0$.

a) Tìm k để phương trình trên có ít nhất một nghiệm dương.

b) Tìm các giá trị của k để phương trình trên có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1 (Hướng dẫn: đặt $x = y + 1$).

Giải

a) • Xét $k = 0$, phương trình trở thành: $-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} > 0$

Vậy $k = 0$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

• Xét $k \neq 0$, phương trình có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn các trường hợp:

• $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow k > 0$

• $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow \frac{k+1}{1} < 0 \Leftrightarrow -1 < k < 0$

• $x_1 = 0 < x_2$ không tồn tại giá trị của k.

Vậy phương trình có ít nhất một nghiệm dương $\Leftrightarrow k > -1$.

b) Đặt $x = y + 1$, ta có phương trình: $ky^2 - 2y - 1 = 0$ (*)

Phương trình đã cho có các nghiệm thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi (*) có một nghiệm âm, một nghiệm dương $\Leftrightarrow P = -\frac{1}{k} < 0 \Leftrightarrow k > 0$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 18. Tính nghiệm gần đúng của phương trình sau (chính xác đến hàng phần nghìn).

a) $(\sqrt{2} - 1)x + 1 - \sqrt{5} = 0$; b) $\sqrt{3}(x - 3) = 1 - x$.

Bài 19. Cho phương trình: $x^2 - x - 1 = 0$ (1). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

a) Tính $S_1 = x_1 + x_2$; $S_2 = x_1^2 + x_2^2$; $S_3 = x_1^3 + x_2^3$; $S_4 = x_1^4 + x_2^4$ và $S_5 = x_1^5 + x_2^5$. Nhận xét gì về dãy S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

b) Với $n \in N^*$, đặt $S_n = x_1^n + x_2^n$. Chứng minh: $S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$.

Bài 20. Cho phương trình ẩn x: $x^2 - 2ax - a - 1 = 0$ (2)

a) Chứng minh: $\forall a$ thì (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tìm một hệ thức giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào a.

c*) Xem (2) như là phương trình đối với hai ẩn: x, a. Tìm tất cả các nghiệm (x; a) của phương trình sao cho $x \in Z$, $a \in Z$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 18.

a) Ta có: $(\sqrt{2} - 1)x + 1 - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - 1} \approx 2{,}984.$

b) $\sqrt{3}(x - 3) = 1 - x \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} \approx 2{,}268.$

Bài 19.

a) Áp dụng định lí Viét vào (1) ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 . x_2 = -1 \end{cases}$

Từ đó, ta có: $S_1 = 1$; $S_2 = 3$; $S_3 = 4$; $S_4 = 7$; $S_5 = 11$.

Nhận xét: Dãy S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 gồm 5 số tự nhiên có tính chất "mỗi số kể từ số hạng thứ 3 đều là tổng của hai số đứng ngay trước nó".

b) Ta có: $S_{n+2} = x_1^{n+2} + x_2^{n+2}$; $S_{n+1} = x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$

và $S_n = x_1^n + x_2^n \quad (n \in N^*)$

Mặt khác: $S_{n+1} = (x_1^{n+1} + x_2^{n+1}).1 = (x_1^{n+1} + x_2^{n+1})(x_1 + x_2)$

$= x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_1^{n+1}.x_2 + x_2^{n+1}.x_1$

$= S_{n+2} + x_1.x_2.S_n = S_{n+2} - S_n$

hay là: $S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$.

Bài 20.

a) Xét (2): $\Delta' = a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \ \forall a.$

Vậy (2) có hai nghiệm phân biệt, $\forall a$.

b) Theo Viét $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a & (3) \\ x_1 . x_2 = -a - 1 & (3') \end{cases}$

Khử a trong hệ ta được: $x_1 + x_2 + 2x_1.x_2 = -2 \qquad (4)$

là hệ thức cần tìm.

c*) Xem (2) là phương trình nghiệm nguyên đối với hai ẩn x, a.

Vì a nguyên $\Rightarrow$ 2a nguyên $\Rightarrow$ nếu x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình ẩn x cho bởi (2) mà x_1 nguyên thì x_2 nguyên và ngược lại (do (3)). Từ đó, để tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình hai ẩn (x; a) cho bởi (2), ta cần tìm tất cả các cặp số nguyên $(x_1; x_2)$ thỏa mãn (4). Do x_1, x_2 nguyên nên:

$$(4) \Leftrightarrow -x_1 = \frac{x_2 + 2}{2x_2 + 1} \Leftrightarrow -2x_1 = 1 + \frac{3}{2x_2 + 1} \qquad (5)$$

Vì x_1, x_2 nguyên nên từ (5) $\Rightarrow$ $2x_2 + 1$ là ước số của 3.

Vậy: $\left[\begin{array}{l} 2x_2 + 1 = 1 \\ 2x_2 + 1 = -1 \\ 2x_2 + 1 = 3 \\ 2x_2 + 1 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_2 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array}\right.$

Thay lại vào (4) ta nhận được các cặp số nguyên $(x_1; x_2)$ cần tìm là:

$(-2; 0), \ (1; -1), \ (-1; 1), \ (0; -2)$.

Thay các cặp trên vào hệ (3), (3') ta được $a = -1$ hoặc $a = 0$.

Đáp số: $\begin{cases} x = -2 \\ a = -1 \end{cases}; \ \begin{cases} x = -1 \\ a = 0 \end{cases}; \ \begin{cases} x = 0 \\ a = -1 \end{cases}; \ \begin{cases} x = 1 \\ a = 0 \end{cases}.$

§3. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình dạng: $|ax + b| = |cx + d|$ (1)

Cách giải:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} ax + b = cx + d \\ ax + b = -cx - d \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(a - c) = d - b \\ x(a + c) = -b - d \end{bmatrix}$$

2. Phương trình chứa ẩn ở mẫu thức

Đối với các phương trình dạng này chúng ta cần phải tìm điều kiện để phương trình xác định, sau đó dùng các phép biến đổi tương đương để đưa phương trình về dạng bậc nhất hoặc bậc hai.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Giải các phương trình:

a) $\dfrac{2(x^2 - 1)}{2x + 1} = 2 - \dfrac{x + 2}{2x + 1}$; **b)** $\dfrac{2x - 5}{x - 1} = \dfrac{5x - 3}{3x + 5}$.

Giải

a) Với điều kiện xác định của phương trình $x \neq -\dfrac{1}{2}$, phương trình tương đương với: $2x^2 - 2 = 4x + 2 - x - 2 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -\dfrac{1}{2}$

Do điều kiện xác định nên phương trình có duy nhất nghiệm $x = 2$.

b) Điều kiện xác định của phương trình: $x \neq 1$ và $x \neq -\dfrac{5}{3}$.

Phương trình tương đương với $x^2 + 3x - 28 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = -7$,
Cả hai nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện xác định.
Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 4$ hoặc $x = -7$.

Bài 2. Giải phương trình $\dfrac{m - 3}{x - 4} = m^2 - m - 6$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $m = 3$; **b)** $m \neq 3$.

Giải

a) Với $m = 3$ ta có phương trình

$\dfrac{0}{x - 4} = 0 \Rightarrow$ phương trình có tập nghiệm là $R \setminus \{4\}$.

b) ĐKXĐ: $x \neq 4$.

Với $m \neq 3$ ta biến đổi phương trình về dạng tương đương
$(m - 3)(m + 2)x = (m - 3)(4m + 9)$. Với $m = -2 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Với $m \neq -2$ ($m \neq -3$), phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{4m+9}{m+2}$ vì $\dfrac{4m+9}{m+2} \neq 4$ với $\forall m$).

Bài 3. Giải và biện luận phương trình (a và m là các tham số):

a) $|2ax + 3| = 5$; b) $\dfrac{2mx - m^2 + m - 2}{x^2 - 1} = 1$.

Giải

a) Ta có: $|2ax + 3| = 5$ (1) $\Leftrightarrow |2ax + 3| = |5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2ax + 3 = 5 \\ 2ax + 3 = -5 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2ax = 2 \\ 2ax = -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax = 1 \\ ax = -4 \end{array}\right.$

Nếu $a = 0 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm;

Nếu $a \neq 0 \Rightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt: $x = \dfrac{1}{a}$, $x = -\dfrac{4}{a}$;

b) Điều kiện xác định của phương trình là $\forall x$; $x \neq 1$ và $x \neq -1$.

Khi đó $\dfrac{2mx - m^2 + m - 2}{x^2 - 1} = 1$ (2)

(2) $\Leftrightarrow 2mx - m^2 + m - 2 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (3)

Ta có: $\Delta' = m^2 - m^2 + m - 1 = m - 1$.

- Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1 \Rightarrow$ (3) vô nghiệm $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.
- Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow$ (3) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1$
  $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.
- Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1 \Rightarrow$ (3) có hai nghiệm phân biệt
  $x_1 = m - \sqrt{m-1}$; $x_2 = m + \sqrt{m-1}$ (hiển nhiên $x_2 > x_1$).

Vì $m > 1$ nên $x_2 > 1 \Rightarrow x_2$ luôn là nghiệm của (2). Còn $x_1 \leq 1$ nên:

Nếu $x_1 = -1 \Leftrightarrow m - \sqrt{m-1} = -1 \Leftrightarrow m + 1 = \sqrt{m-1}$

$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 = m - 1$ (vì $m + 1 > 0$)

$\Leftrightarrow m^2 + m + 2 = 0$ phương trình này vô nghiệm tức là $x_1 \neq -1$ với mọi $m > 1$. Vậy $x_1 = 1 \Leftrightarrow m = 2$.

Tóm lại: • $m \leq 1$ thì (2) vô nghiệm;

• $m > 1$ và $m \neq 2$thì (2) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = m - \sqrt{m-1}$; $x_2 = m + \sqrt{m-1}$.

• $m = 2$ thì (2) có một nghiệm $x = 3$.

LUYỆN TẬP

Bài 4. Giải và biện luận phương trình (m, a và k là các tham số):

a) $|mx - x + 1| = |x + 2|$; b) $\dfrac{a}{x-2} + \dfrac{1}{x-2a} = 1$;

c) $\frac{mx - m - 3}{x + 1} = 1$; d) $\frac{3x + k}{x - 3} = \frac{x - k}{x + 3}$

Giải

a) Gọi phương trình $|mx - x + 1| = |x + 2|$ là phương trình (1). Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} mx - x + 1 = x + 2 \\ mx - x + 1 = -x - 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(m - 2) = 1 & (2) \\ mx = -3 & (3) \end{bmatrix}$$

* Biện luận:

Nếu $m = 2$ thì (2) vô nghiệm, (3) có nghiệm $x = -\frac{3}{2}$ nên (1) có nghiệm $x = -\frac{3}{2}$.

Nếu $m = 0$ thì (3) vô nghiệm, (2) có nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$ nên (1) có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

Nếu $m \neq 2$ và $m \neq 0$ thì (2) có nghiệm là $x = \frac{1}{m - 2}$, (3) có nghiệm là $x = -\frac{3}{m}$ nên (1) có hai nghiệm $x = \frac{1}{m - 2}$, $x = -\frac{3}{m}$.

Kết luận: $m = 2$, (1) có nghiệm $x = -\frac{3}{2}$;

$m = 0$, (1) có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$;

$m \neq 2$, $m \neq 0$ (1) có hai nghiệm $x = \frac{1}{m - 2}$, $x = -\frac{3}{m}$;

b) Điều kiện để phương trình đã cho được xác định là:

$x \in R$, $x \neq 2$ và $x \neq 2a$.

Với điều kiện đó phương trình đã cho tương đương với:

$$ax - 2a^2 + x - 2 = x^2 - 2ax - 2x + 4a$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2\frac{3}{2}(a + 1)x + \frac{9}{4}(a + 1)^2 - \left(\frac{a + 1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [x - 2(a + 1)][x - (a + 1)] = 0$$

$\Leftrightarrow x = 2a + 2$ hoặc $x = a + 1$

Nếu $a = 0 \Rightarrow$ phương trình đã cho có một nghiệm $x = 1$

Nếu $a = 1 \Rightarrow$ phương trình đã cho có một nghiệm $x = 4$

Nếu $a \neq 0$ và $a \neq 1 \Rightarrow 2a + 2 \neq 2$, $2a + 2 \neq 2a$, $a + 1 \neq 2$, $a + 1 \neq 2a$ nên phương trình đã có hai nghiệm phân biệt $x = a + 1$, $x = 2a + 2$.

c) Gọi phương trình: $\frac{mx - m - 3}{x + 1} = 1$ là phương trình (1).

Điều kiện xác định của phương trình (1) là: $\forall x \in R, x \neq -1$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow$ $mx - m - 3 = x + 1 \Leftrightarrow x(m - 1) = m + 4$ (2)

Nếu $m = 1$ thì (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm.

Nếu $m \neq 1$ thì (2) $\Leftrightarrow$ $x = \frac{m + 4}{m - 1}$ giá trị này là nghiệm của (1) khi và chỉ khi $\frac{m + 4}{m - 1} \neq -1 \Leftrightarrow m + 4 \neq -m + 1 \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$.

Vậy ta có:

- $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{2}$ thì (1) vô nghiệm.
- $m \neq 1$ và $m \neq -\frac{3}{2}$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{m + 4}{m - 1}$.

d) Gọi phương trình $\frac{3x + k}{x - 3} = \frac{x - k}{x + 3}$ là phương trình (1).

Điều kiện xác định của (1) là: $\forall x \in R, x \neq 3$ và $x \neq -3$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow$ $3x^2 + 9x + kx + 3k = x^2 - kx - 3x + 3k$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 + 12x + 2kx = 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2 + 6x + kx = 0$

$\Leftrightarrow$ $x(x + 6 + k) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -k - 6 \end{array}\right.$

- Nếu $\left\{\begin{array}{l} -6 - k \neq 3 \\ -6 - k \neq -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k \neq -9 \\ k \neq -3 \end{array}\right.$

thì khi đó $x = -k - 6$ là nghiệm của (1), do vậy (1) có hai nghiệm: $x = 0$ và $x = -k - 6$.

- Nếu $\left[\begin{array}{l} k = -9 \\ k = -3 \end{array}\right.$ thì $x = -k - 6$ không là nghiệm của (1), do vậy (1) chỉ có đúng một nghiệm $x = 0$.

Kết luận:

- $\left\{\begin{array}{l} k \neq -9 \\ k \neq -3 \end{array}\right.$, (1) có hai nghiệm $x = 0$, $x = -k - 6$.
- $\left[\begin{array}{l} k = -9 \\ k = -3 \end{array}\right.$, (1) có một nghiệm $x = 0$.

Bài 5. Giải và biện luận các phương trình sau (m và a là các tham số)

a) $(2x + m - 4)(2mx - x + m) = 0$; b) $|mx + 2x - 1| = |x|$;

c) $(mx + 1)\sqrt{x - 1} = 0$; d) $\frac{2a - 1}{x - 2} = a - 2$;

e) $\frac{(m + 1)x + m - 2}{x + 3} = m$; f) $\left|\frac{ax + 1}{x - 1}\right| = a$.

Giải

a) Đặt phương trình: $(2x + m - 4)(2mx - x + m) = 0$ là phương trình (1).

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 - m & (a) \\ (2m - 1)x = -m & (b) \end{cases}$$

Nếu $2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (b) vô nghiệm, do đó:

$$(1) \Leftrightarrow (a) \Leftrightarrow x = \frac{4 - m}{2} = \frac{4 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{7}{4};$$

Nếu $2m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2} \Rightarrow (b) \Leftrightarrow x = \frac{m}{1 - 2m}$.

Kết luận: $m = \frac{1}{2}$, (1) có một nghiệm $x = \frac{7}{4}$

$m \neq \frac{1}{2}$, (1) có hai nghiệm $x_1 = \frac{4 - m}{2}$; $x_2 = \frac{m}{1 - 2m}$ (chú ý trường hợp này có thể $x_1 = x_2$).

b) Đặt phương trình: $|mx + 2x - 1| = |x|$ là phương trình (2).

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 2x - 1 = x \\ mx + 2x - 1 = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)x = 1 \\ (m + 3)x = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ta có sự biện luận sau:

• Khi $m \neq -1$ và $m \neq -3$, phương trình (2) có các nghiệm $x = \frac{1}{m + 1}$, $x = \frac{1}{m + 3}$

• Khi $m = -1$ phương trình (2) có nghiệm $x = \frac{1}{2}$. Khi $m = -3$ phương trình (2) có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

c) Đặt phương trình: $(mx + 1)\sqrt{x - 1} = 0$ là phương trình (3).

Điều kiện xác định: $\forall x; x \geq 1$.

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} mx = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Nếu $m = 0 \Rightarrow$ phương trình $mx = -1$ vô nghiệm

$\Rightarrow$ (3) có một nghiệm $x = 1$

Nếu $m \neq 0$ ta có: $mx = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{m}$, giá trị này chỉ là nghiệm của (3)

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{-m - 1}{m} \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$$

Vậy: phương trình có hai nghiệm $x = 1$, $x = -\frac{1}{m}$ khi $-1 < m < 0$.

• Phương trình có nghiệm $x = 1$ khi $m \le -1$ hoặc $m \ge 0$.

d) Gọi phương trình: $\frac{2a-1}{x-2} = a - 2$ là phương trình (4).

Điều kiện xác định của (4) là: $\forall x \in R, x \ne 2$. Khi đó:

(4) $\Leftrightarrow$ $(a-2)x = 4a - 5$ (d)

• Nếu $a = 2$ thì (d) vô nghiệm, do đó (4) vô nghiệm

• Nếu $a \ne 2$ thì (d) có nghiệm $x = \frac{4a-5}{a-2}$, giá trị này chỉ là nghiệm của (4) khi và chỉ khi $\frac{4a-5}{a-2} \ne 2 \Leftrightarrow a \ne \frac{1}{2}$.

Vậy: • $a = 2$ hoặc $a = \frac{1}{2}$ thì (4) vô nghiệm.

• $a \ne 2$ và $a \ne \frac{1}{2}$ thì (4) có nghiệm $x = \frac{4a-5}{a-2}$.

e) Đặt phương trình: $\frac{(m+1)x + m - 2}{x+3} = m$ là phương trình (5). Khi đó, điều kiện xác định của phương trình là: $\forall x \in R, x \ne -3$. Với điều kiện đó thì (5) $\Leftrightarrow$ $x = 2m + 2$, giá trị này là nghiệm của (5) khi và chỉ khi $2m + 2 \ne -3 \Leftrightarrow m \ne -\frac{5}{2}$. Do đó:

• $m = -\frac{5}{2}$, (5) vô nghiệm;

• $m \ne -\frac{5}{2}$, (5) có nghiệm duy nhất $x = 2m + 2$.

f) Đặt phương trình: $\left|\frac{ax+1}{x-1}\right| = a$ là phương trình (6). Khi đó điều kiện xác định của (6) là: $\forall x \in R, x \ne 1$.

Ta thấy, nếu $a < 0$ thì (6) vô nghiệm.

Xét $a \ge 0$, khi đó (6) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax + 1 = ax - a \\ ax + 1 = -ax + a \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 = -a \\ 2ax = a - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 2ax = a - 1$

Biện luận:

Nếu $a = 0$ thì (6) vô nghiệm.

Nếu $a > 0$, (6) có nghiệm duy nhất $x = \frac{a-1}{2a}$ khi và chỉ khi $\frac{a-1}{2a} \ne 1$ hay (6) có nghiệm duy nhất $x = \frac{a-1}{2a}$ (vì $a > 0$ thì $\frac{a-1}{2a} \ne 1$).

Kết luận: • $a \le 0$, (6) vô nghiệm;

• $a > 0$, (6) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a-1}{2a}$.

Bài 6. Bằng cách đặt ẩn phụ, giải các phương trình sau:

a) $4x^2 - 12x - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 15 = 0$;

b) $x^2 + 4x - 3|x + 2| + 4 = 0$; **c)** $4x^2 + \dfrac{1}{x^2} + \left|2x - \dfrac{1}{x}\right| - 6 = 0$.

Giải

a) Ta viết phương trình đã cho dưới dạng tương đương:

$$4x^2 - 12x + 11 - 5\sqrt{4x^2 - 12x + 11} + 4 = 0$$

Đặt $\sqrt{4x^2 - 12x + 11} = t$, $(t \geq 0)$ ta có phương trình:

$t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 4$.

• Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 12x + 11} = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Delta' = 3^2 - 10 = -1 < 0$ nên phương trình này vô nghiệm.

• Với $t = 4 \Rightarrow \sqrt{4x^2 - 12x + 11} = 4 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x - 5 = 0$

có: $\Delta' = 36 + 20 = 56$, phương trình có hai nghiệm: $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{56}}{4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{14}}{2}$.

Các giá trị này đều là nghiệm của phương trình ban đầu.

b) Ta viết phương trình về dạng tương đương:

$|x + 2|^2 - 3|x + 2| = 0$ (vì $|A|^2 = A^2$ với mọi A)

Đặt $|x + 2| = t$ $(t \geq 0)$, ta có phương trình:

$$t^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3 \end{array}\right.$$

• Với $t = 0 \Leftrightarrow |x + 2| = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

• Với $t = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2 = 3 \\ x + 2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -5 \end{array}\right.$

Tóm lại, phương trình ban đầu có ba nghiệm: $x = 1$, $x = -5$, $x = -2$

c) Ta viết phương trình về dạng tương đương:

$$\left|2x - \frac{1}{x}\right|^2 + \left|2x - \frac{1}{x}\right| - 2 = 0$$

Đặt $\left|2x - \dfrac{1}{x}\right| = t$ $(t \geq 0)$. Khi đó, ta có phương trình:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \ \text{(loại vì } t = -2 < 0) \end{array}\right.$$

• Với $t = 1 \Leftrightarrow \left|2x - \dfrac{1}{x}\right| = 1 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{1}{x} = 1$ hoặc $2x - \dfrac{1}{x} = -1$

Giải các phương trình này ta có nghiệm của phương trình ban đầu là:

$x = 1;\ x = -\frac{1}{2};\ x = -1;\ x = \frac{1}{2}$.

Bài 7. Tìm các giá trị của tham số m sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất: $|mx - 2| = |x + 4|$ (*)

Giải

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} mx - 2 = x + 4 \\ mx - 2 = -x - 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x(m - 1) = 6 & \text{(a)} \\ x(m + 1) = -2 & \text{(b)} \end{bmatrix}$

• Nếu $m = 1 \Rightarrow$ (a) vô nghiệm, (b) có nghiệm $x = -1$, giá trị này là nghiệm duy nhất của (*).

• Nếu $m = -1 \Rightarrow$ (b) vô nghiệm, (a) có nghiệm $x = -3$, giá trị này là nghiệm duy nhất của (*).

• Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -1$ thì của hai phương trình (a) và (b) đều có nghiệm

$\Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \frac{6}{m - 1} = -\frac{2}{m + 1}$

$\Leftrightarrow 6m + 6 = -2m + 2 \Leftrightarrow 8m = -4 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Tóm lại: $m = 1$ hoặc $m = -1$, hoặc $m = -\frac{1}{2}$ (*) có nghiệm duy nhất.

Bài 8. Với giá trị nào của m thì phương trình sau vô nghiệm:

$$\frac{x + 1}{x - a + 1} = \frac{x}{x + a + 2}$$

Hướng dẫn:

Với điều kiện $x \neq a - 1$ và $x \neq -a - 2$, ta có:

$$\frac{x + 1}{x - a + 1} = \frac{x}{x + a + 2} \Leftrightarrow 2(a + 1)x = -(a + 2) \qquad (1)$$

Nếu $a = -1$ thì (1) vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Nếu $a \neq -1$ thì (1) có nghiệm $x = -\frac{a + 2}{2(a + 1)}$. Ta cần xét xem khi nào thì giá trị này bị loại do không thỏa mãn điều kiện xác định (chú ý là đang xét trường hợp $a \neq -1$):

$* -\frac{a + 2}{2(a + 1)} = a - 1 \Leftrightarrow 2a^2 + a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = -\frac{1}{2}$

$* \frac{a + 2}{2(a + 1)} = -a - 2 \Leftrightarrow (a + 2)(2a + 1) = 0 \Leftrightarrow a = -2$ hoặc $a = -\frac{1}{2}$

Từ đó ta suy ra phương trình vô nghiệm nếu $a \in \left\{-2; -1; -\frac{1}{2}; 0\right\}$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 9. Giải hệ biện luận phương trình: $\dfrac{xm+1}{x-1} = 2$ (1)

Bài 10*. Cho phương trình: $|x^2 - 3x + m| = x^2 - 2x + m - 1$ (3)

a) Giải phương trình khi $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình trên có ba nghiệm phân biệt.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 9. • $\left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -1 \end{array}\right.$ thì (1) vô nghiệm.

• $m \neq -1$ và $m \neq 2$, (1) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3}{2-m}$.

Bài 10*. a) Khi $m = 3$ phương trình có duy nhất nghiệm $x = 1$.

b) Giá trị của m cần tìm là: $2 < m < \dfrac{33}{16}$.

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Phương trình hai ẩn (x và y) có dạng tổng quát là: $ax + by = c$ (với $a^2 + b^2 \neq 0$) được gọi là phương trình bậc nhất hai ẩn.

• Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ luôn có vô số nghiệm. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một đường thẳng gọi là đường thẳng $ax + by = c$.

2. Hệ phương trình hai ẩn (x và y): Cho hai phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$.

• Mệnh đề chứa biến "$ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$" được gọi là một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, kí hiệu là:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a' + b'y = c' \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của hai phương trình trong hệ (I), là một nghiệm của hệ (I).

3. Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (hệ (I))

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b; \quad Dx = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b; \quad Dy = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

– Nếu $D \neq 0$, hệ (I) có nghiệm duy nhất (x; y) tính theo công thức:

$$x = \frac{Dx}{D} \text{ và } y = \frac{Dy}{D}.$$

– Nếu $D = 0$, $Dx \neq 0$ hoặc $Dy \neq 0$, hệ (I) vô nghiệm.

– Nếu $D = Dx = Dy = 0$, thì hệ (I) có vô số nghiệm (x; y) tính theo công thức:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-by + c}{a} \\ y \in R \end{cases} \text{ (nếu } a \neq 0\text{) hoặc } \begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{-ax + c}{b} \end{cases} \text{ (nếu } b \neq 0\text{)}$$

Chú ý: Khi giải biện luận hệ phương trình có chứa tham số dạng :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

có thể xảy ra trường hợp $a = b = c = 0$ (hoặc $a' = b' = c' = 0$). Khi đó, ta sử dụng các kết luận sau đây:

• Phương trình $0x + 0y = c$ vô nghiệm khi $c \neq 0$, nghiệm đúng với mọi x và mọi y nếu $c = 0$.

• Trong một hệ phương trình nếu một phương trình vô nghiệm thì hệ vô nghiệm.

• Trong một hệ phương trình, nếu một phương trình được nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn thì tập nghiệm của phương trình trùng với tập nghiệm của phương trình còn lại.

4. Giả sử (d) là đường thẳng có phương trình $ax + by = c$ và (d') có phương trình: $a'x + b'y = c'$

• Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (d) cắt (d') $\Leftrightarrow D = ab' - a'b \neq 0$

• Hệ (I) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (d) // (d') $\Leftrightarrow D = 0$ và $Dx \neq 0$ hoặc $Dy \neq 0$.

• Hệ (I) vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ (d) $\equiv$ (d') $\Leftrightarrow D = Dx = Dy = 0$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho hệ phương trình bậc nhất hai ẩn. Biết rằng phương trình thứ hai trong hệ nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn. Hãy chọn kết luận đúng trong các khẳng định sau:

(A) Hệ đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị của các ẩn;

(B) Hệ đã cho vô nghiệm;

(C) Tập nghiệm của hệ đã cho trùng với tập nghiệm của phương trình thứ nhất;

(D) Không có kết luận gì.

Giải

Kết luận (C) là kết luận đúng.

Bài 2. Bằng định thức, giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$

Giải

a) Ta có:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -45 + 28 = -17;\ Dx = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = 5;\ Dy = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 19;$$

Từ đó: Ta có hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\dfrac{-5}{17}; -\dfrac{19}{17}\right)$

b) Ta có: D = −1; Dx = $-\sqrt{3}$; Dy = $2\sqrt{2}$.

Từ đó nghiệm của hệ là (x; y) = $\left(\sqrt{3}; -2\sqrt{2}\right)$.

Bài 3. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{y-1} = 3 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y-1} = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{3(x+y)}{x-y} = -7 \\ \dfrac{5x-y}{x-y} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Giải

a) ĐKXĐ: $x \neq 0$ và $y \neq 1$.

Đặt $\dfrac{1}{x} = X$; $\dfrac{1}{y-1} = Y$, ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4X + Y = 3 \\ X - Y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ Y = -1 \end{cases}$. Do vậy $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = 1 \\ \dfrac{1}{y-1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

b) ĐKXĐ: $x, y \in R, x \neq y$.

Với điều kiện đó hệ đã cho trở thành

$\begin{cases} 10x = 4y \\ 20x = 8y \end{cases} \Leftrightarrow 5x = 2y \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5}y$

$\Rightarrow$ Hệ ban đầu có nghiệm: $\left(\dfrac{2}{5}y; y\right) y \in R^*$ hoặc $\left(x; \dfrac{5}{2}x\right)$ với $x \in R^*$.

Bài 4. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2ax + 3y = 5 \\ (a+1)x + y = 0 \end{cases}$

Giải

a) Ta có $D = m^2 - 1$; $Dx = m(m+1)$; $Dy = m + 1$

Biện luận: Nếu $m \neq 1$ và $m \neq -1$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$(x; y) = \left(\dfrac{m}{m-1}; \dfrac{1}{m-1}\right)$;

Nếu m = 1 thì hệ vô nghiệm;

Nếu m = −1 thì hệ có vô số nghiệm (x; y) được xác định theo công thức

$\begin{cases} x \in R \\ y = -x \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y \in R \\ x = -y \end{cases}$

b) Ta tính được: D = −(a + 3); Dx = 5; Dy = −5(a + 1)

Biện luận:

- Nếu $a \neq -3$ thì hệ có một nghiệm $(x; y) = \left(-\dfrac{5}{a+3}; \dfrac{5(a+1)}{a+3}\right)$

- Nếu a = −3 thì hệ vô nghiệm.

Bài 5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$

Giải

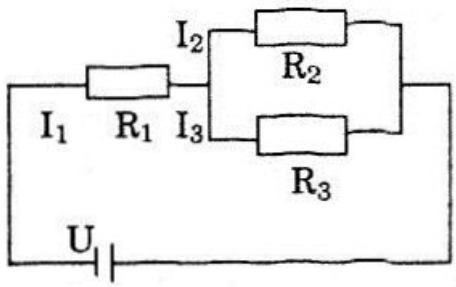
Trừ vế với vế phương trình thứ nhất cho phương trình thứ hai ta có:

$-x + 2y = 6$ (1)

Trừ vế với vế phương trình thứ ba cho phương trình thứ hai ta được phương trình $x + 3y = 19$ (2)

Từ (1) và (2) ta tìm được $x = 4$; $y = 5$. Thay vào phương trình ban đầu ta được $z = 2$. Vậy hệ có nghiệm là $(x; y; z) = (4; 5; 2)$.

Bài 6. Cho một mạch điện kín. Biết $R_1 = 0{,}25\Omega$, $R_2 = 0{,}36\Omega$, $R_3 = 0{,}45\Omega$ và $U = 0{,}6V$. Gọi I_1 là cường độ dòng điện của mạch chính, I_2 là cường độ dòng điện của mạch rẽ. Tính I_1, I_2, I_3 (chính xác đến phần trăm).



Giải

I_1, I_2, I_3 là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ R_1I_1 + R_2I_2 = U \\ R_2I_2 - R_3I_3 = 0 \end{cases}$

Thay các giá trị đã biết ta có hệ: $\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 0{,}25I_1 + 0{,}36I_2 = 0{,}6 \\ 0{,}36I_2 - 0{,}45I_3 = 0 \end{cases}$

Giải hệ này và quy tròn kết quả đến hàng phần trăm ta được:

$I_1 \approx 1{,}33A$; $I_2 \approx 0{,}74A$; $I_3 \approx 0{,}59A$.

LUYỆN TẬP

Bài 7. Cho một hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn. Biết rằng phương trình thứ hai trong hệ vô nghiệm. Hãy chọn kết luận đúng trong các khẳng định sau:

(A) Hệ đã cho nghiệm đúng với mọi giá trị của ẩn;

(B) Hệ đã cho vô nghiệm;

(C) Tập nghiệm của hệ đã cho trùng với tập nghiệm của phương trình thứ nhất;

(D) Không có kết luận gì.

Giải

Kết luận hệ đã cho vô nghiệm là đúng, khẳng định đúng là khẳng định (B).

Bài 8. Tính nghiệm gần đúng của hệ phương trình sau (chính xác đến hàng phần trăm):

a) $\begin{cases}\sqrt{3}x - y = 1\\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3}\end{cases}$; b) $\begin{cases}4x + (\sqrt{3} - 1)y = 1\\ (\sqrt{3} + 1)x + 3y = 5\end{cases}$

Giải

a) Ta có $D = 5 + \sqrt{6}$; $Dx = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; $Dy = -2$. Do đó nghiệm của hệ phương trình (chính xác đến phần trăm) là:

$$x \approx 0{,}42;\ y \approx -0{,}27$$

b) Ta tính được $D = 10$; $Dx = 8 - 5\sqrt{3}$; $Dy = 19 - \sqrt{3}$. Do đó nghiệm của hệ phương trình (chính xác đến hàng phần trăm) là:

$$x \approx -0{,}07;\ y \approx 1{,}73$$

Bài 9. Một miếng đất hình chữ nhật có chu vi 2p (mét). Nếu mở rộng miếng đất đó bằng cách tăng một cạnh thêm 3m và cạnh kia thêm 2m thì diện tích miếng đất tăng thêm $246m^2$. Tính các kích thước của miếng đất đó (biện luận theo p).

Giải

Gọi hai kích thước (tính bằng mét) của hình chữ nhật là x và y ($x > 0$, $y > 0$) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}x + y = p\\ (x + 3)(y + 2) = xy + 246\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}x + y = p\\ 2x + 3y = 240\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: $x = 3p - 240$; $y = 240 - 2p$.

Điều kiện $x > 0$, $y > 0$ trở thành: $\begin{cases}3p - 240 > 0\\ 240 - 2p > 0\end{cases}$, suy ra $80 < p < 120$

Vậy kích thước của miếng đất là $3p - 240$ (mét) và $240 - 2p$ (mét) với điều kiện $80 < p < 120$.

Bài 10. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases}x + my = 1\\ mx - 3my = 2m + 3\end{cases}$; b) $\begin{cases}mx + y = 4 - m\\ 2x + (m - 1)y = m\end{cases}$

Giải

a) Ta tính được $D = -m(m + 3)$; $Dx = -2m(m + 3)$; $Dy = m + 3$

- Nếu $m \neq 0$ và $m \neq -3$ thì $D \neq 0$ hệ có một nghiệm: $(x; y) = \left(2; -\frac{1}{m}\right)$.
- Nếu $m = 0$ thì hệ trở thành $\begin{cases}x + 0y = 1\\ 0x + 0y = 3\end{cases}$ hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = -3$ thì hệ trở thành $\begin{cases}x - 3y = 1\\ -3x + 9y = -3\end{cases}$, có vô số nghiệm (x; y) được tính theo công thức $\begin{cases}x = 3y + 1\\ y \in R\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x \in R\\ y = \dfrac{x - 1}{3}\end{cases}$.

b) Ta tính được: $D = m^2 - m - 2 = (m + 1)(m - 2)$

$Dx = -m^2 + 4m - 4 = -(m - 2)^2$; $Dy = (m + 4)(m - 2)$

– Với $m \neq -1$ và $m \neq 2$ hệ có một nghiệm $(x; y) = \left(\frac{-m+2}{m+1}; \frac{m+4}{m+1}\right)$;

– Với $m = -1$: Hệ vô nghiệm;

– Với $m = 2$: Hệ có vô số nghiệm $(x; y)$ được tính theo công thức

$$\begin{cases} x \in R \\ y = 2(1-x) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y \in R \\ x = \frac{2-y}{2} \end{cases}.$$

Bài 11. Với giá trị nào của a mỗi hệ phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} (a+2)x + 3y = 3a+9 \\ x + (a+4)y = 2 \end{cases}$

Giải

Ta tính được $D = a^2$; $Dx = a^2 + 1$

Hệ có nghiệm trong hai trường hợp sau:

– Hệ có nghiệm duy nhất, tức là $D \neq 0$ (xảy ra khi và chỉ khi $a \neq 0$)

– Hệ có vô số nghiệm, tức là $D = Dx = Dy = 0$ (không xảy ra).

Vậy hệ có nghiệm khi $a \neq 0$

b) Ta có: $D = a^2 + 6a + 5 = (a+1)(a+5)$.

Hệ có nghiệm trong hai trường hợp sau:

– Hệ có nghiệm duy nhất, tức là $D \neq 0$ (xảy ra khi và chỉ khi $a \neq -1$ và $a \neq -5$)

– Hệ có vô số nghiệm, tức là $D = Dx = Dy = 0$ (xét cụ thể với $a = -1$ và $a = -5$. Kết quả cho thấy chỉ có $a = -5$ là thỏa mãn).

Vậy hệ có nghiệm khi $a \neq -1$.

Bài 12. Tìm tất cả các cặp số nguyên (a; b) sao cho hệ phương trình sau vô nghiệm: $\begin{cases} ax + y = 2 \\ 6x + by = 4 \end{cases}$

Giải

Ta có: $D = ab - 6$, $D_x = 2b - 4$; $D_y = 4a - 12$

Điều kiện cần để hệ vô nghiệm là: $D = 0 \Leftrightarrow ab = 6$ vì $a, b \in Z$ nên có các cặp số thỏa mãn:

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \end{cases}; \begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \end{cases}; \begin{cases} a = -6 \\ b = -1 \end{cases}; \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases}; \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}; \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}; \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}; \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases}$

Do hệ đã cho là hệ bậc nhất 2 ẩn nên hệ vô nghiệm ta cần phải có thêm $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$. Kiểm tra lần lượt với 8 cặp số trên ta thấy chỉ có cặp $\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$ không thỏa mãn.

Vậy có 7 cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán

$(a; b) \in \{(1; 6); (6; 1); (-1; -6); (-6; -1); (-2; -3); (-3; -2); (2; 3)\}$

Bài 13. Cho hai đường thẳng (d_1): $x + my = 3$ và (d_2): $mx + 4y = 6$.

a) Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng đó cắt nhau?

b) Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng ấy song song với nhau?

c) Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng ấy trùng nhau?

Giải

Xét hệ phương trình tọa độ giao điểm của hai đường thẳng:

$$\begin{cases} x + my = 3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}$$

Ta tính được: $D = 4 - m^2$; $Dx = 12 - 6m$; $Dy = 3(2 - m)$

a) (d_1) và (d_2) cắt nhau $\Leftrightarrow$ $D \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $4 - m^2 \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $m \neq \pm 2$

b) (d_1) song song (d_2) $\Leftrightarrow$ $D = 0$ và $Dx \neq 0$ (hoặc $Dy \neq 0$) $\Leftrightarrow$ $m = -2$

c) (d_1) và (d_2) trùng nhau $\Leftrightarrow$ $D = Dx = Dy = 0$ $\Leftrightarrow$ $m = 2$.

Bài 14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$

Giải

Cộng vế với vế phương trình thứ nhất và phương trình thứ hai ta được phương trình $2x = 8$ hay $x = 4$.

Cộng vế với vế phương trình thứ hai và phương trình thứ ba ta có $2y = 4$ hay $y = 2$.

Cộng vế với vế phương trình thứ nhất với phương trình thứ ba ta có $2z = 10$ hay $z = 5$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x; y; z) = (4; 2; 5)$.

Bài 15. Bài toán máy bơm nước.

Một gia đình muốn mua một chiếc máy bơm nước. Có hai loại có cùng lưu lượng nước bơm được trong một giờ: loại thứ nhất giá 1,5 triệu đồng, loại thứ hai giá 2 triệu đồng. Tuy nhiên, nếu dùng máy bơm loại thứ nhất thì mỗi giờ tiền điện phải trả là 1200 đồng, trong khi dùng máy bơm loại thứ hai thì phải trả 1000 đồng, cho mỗi giờ bơm.

Kí hiệu $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt là số tiền (tính bằng nghìn đồng) phải trả khi sử dụng máy bơm loại thứ nhất và loại thứ hai trong x giờ (bao gồm tiền điện và tiền mua máy bơm).

a) Hãy biểu diễn $f(x)$ và $g(x)$ dưới dạng các biểu thức của x.

b) Vẽ đồ thị của $y = f(x)$ và $y = g(x)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

c) Xác định tọa độ giao điểm của hai đồ thị ấy. Hãy phân tích ý nghĩa kinh tế của giao điểm đó.

Giải

Trước hết ta có: 1,5 triệu đồng = 1500 nghìn đồng;

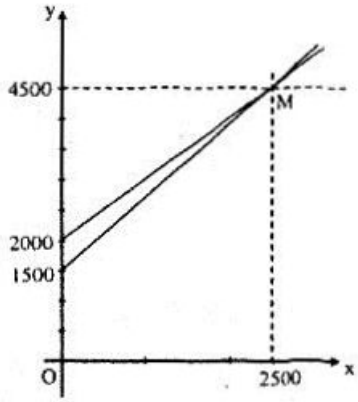
2 triệu đồng = 2000 nghìn đồng;

1200 đồng = 1,2 nghìn đồng;

1000 đồng = 1 nghìn đồng.

a) Ta có được: f(x) = 1500 + 1,2x; g(x) = 2000 + x, với điều kiện $x \geq 0$

b) Vẽ đồ thị f(x) và g(x) trên cùng mặt phẳng tọa độ được cho ở hình dưới đây:



c) Hoành độ giao điểm M của hai đồ thị là nghiệm của phương trình:

$1500 + 1,2x = 2000 + x$

$0,2x = 500$

$x = 2500$

Tung độ giao điểm M là $y = g(2500) = 4500$.

Ta thấy khi $x > 2500$ thì đường thẳng $y = f(x)$ ở phía trên đường thẳng $y = g(x)$. Từ đó suy ra ý nghĩa kinh tế của giao điểm M như sau:

– Nếu dùng ít hơn 4500 giờ bơm thì mua máy thứ nhất sẽ tiết kiệm hơn.

– Nếu dùng đúng 4500 giờ bơm thì số tiền phải trả (bao gồm tiền điện và tiền nước) là như nhau.

– Nếu dùng nhiều hơn 4500 giờ bơm thì mua máy thứ hai tiết kiệm hơn.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 16. Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} 6ax + (2 - a)y = 3 \\ (a - 1)x - ay = 2 \end{cases}$

Bài 17. Tìm m sao cho hệ có nghiệm với mọi giá trị của m: $\begin{cases} mx + 2y = n \\ x + 5y = 7 \end{cases}$

Bài 18*. Giả sử hệ $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$ có nghiệm.

Chứng minh: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Bài 19*. Tìm a, b để hệ sau có nghiệm với mọi giá trị của m:

$$\begin{cases} (m + 3)x + 4y = 5a + 3b + m \\ x + my = ma - 2b + 2m - 1 \end{cases}$$

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 16. Ta có: $D = -(a + 1)(5a - 2)$; $Dx = -a - 4$; $Dy = 9a + 3$.

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$ và $a \neq \frac{2}{5}$ thì hệ có nghiệm $x = \frac{a + 4}{(a + 1)(5a - 2)}$; $y = \frac{-(9a + 3)}{(a + 1)(5a - 2)}$

– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow a = -1$ hoặc $a = \frac{2}{5}$ thì $Dx \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Bài 17. Ta tính được $D = 5m - 2$

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{2}{5}$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5}$. Khi đó, $Dx = 5n - 14$; $Dy = \frac{14}{5} - n$ hệ có nghiệm với mọi m nên $Dx = Dy = 0 \Leftrightarrow n = \frac{14}{5}$.

Bài 18*. Nếu $a = b = c = 0$ thì hệ thức được thỏa mãn. Xét trường hợp a, b và c không đồng thời bằng không, ta xét hệ gồm hai phương trình đầu trong hệ, giải hệ này tìm x và y sau đó thay vào phương trình còn lại ta được hệ thức cần chứng minh.

Bài 19*. Ta tính được: $D = m^2 + 3m - 4$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -4$ hệ có nghiệm với mọi a, b.

Để hệ có nghiệm với mọi m thì hệ phải có nghiệm với $m = 1$ và $m = -4$.

• $m = 1$, hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} 4x + 4y = 5a + 3b + 1 \\ x + y = a - 2b + 1 \end{cases}$

Suy ra, hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 5a + 3b + 1 = 4(a - 2b + 1)$

$\Leftrightarrow 5a + 3b + 1 = 4a - 8b + 4 \Leftrightarrow a + 11b = 3 \quad (1)$

• $m = -4$, hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} -x + 4y = 5a + 3b - 4 \\ x - 4y = -4a - 2b - 9 \end{cases}$

Suy ra, hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 5a + 3b - 4 = +4a + 2b + 9$

$\Leftrightarrow a + b = 13 \quad (*)$

Vậy hệ có nghiệm với mọi $m \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a + 11b = 3 \\ a + b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 \\ b = -1 \end{cases}$.

§5. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai hai ẩn.

Dạng tổng quát: $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx^2 + ey^2 + hxy + gx + ky = m & (2) \end{cases}$

Ở đó a, b, c, d, e, h, g, k và m là các hằng số thực.

Cách giải: Dùng phương pháp thế, tính x theo y (hoặc y theo x) từ phương trình thứ nhất rồi thế vào phương trình (2) ta được một phương trình bậc hai một ẩn, giải phương trình này ta tìm được x (hoặc y) (nếu có) sau đó thế vào (1) tìm giá trị của ẩn còn lại.

2. Hệ phương trình đối xứng: Có hai dạng sau.

Dạng 1. Từng phương trình không đổi khi ta đồng thời thay x bởi y và thay y bởi x. Để giải phương trình này ta dùng phương pháp đặt ẩn phụ $S = x + y$, $P = x.y$, ta thu được hệ hai ẩn S, P. Từ đó ta tìm S, P (nếu có) sau đó tìm x, y.

Dạng 2. Khi ta đồng thời thay đổi x bởi y và y bởi x thì phương trình này trở thành phương trình kia trong hệ và ngược lại. Để giải hệ dạng này thông thường ta lấy phương trình này trừ đi phương trình kia vế với vế ta quy về hai hệ đơn giản hơn.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 164 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$.

Giải

a) Từ phương trình đầu ta có: $x = 2 + y$ thế vào phương trình $x^2 + y^2 = 164$ ta được phương trình $y^2 + 2y - 80 = 0$, phương trình này có hai nghiệm:

$y = 8$ hoặc $y = -10$. Từ đó hệ có hai nghiệm là: (10; 8), (−8; −10)

b) Từ phương trình thứ hai trong hệ ta có: $y = 1 - 2x$, thế vào phương trình đầu ta được phương trình: $15x^2 - 9x - 6 = 0$, phương trình này có hai nghiệm $x = 1$ hoặc $x = -\frac{2}{5}$. Từ đó ta có hệ có hai nghiệm:

(1; −1) và $\left(-\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

Bài 2. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ xy + x + y = 5 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1 \end{cases}$; **c)** $\begin{cases} x^2 - 3x = 2y \\ y^2 - 3y = 2x \end{cases}$

Hướng dẫn:

a) Đặt $x + y = S$, $x.y = P$ ta đưa hệ về dạng:

$\begin{cases} S^2 + S - 2P = 8 \\ S + P = 5 \end{cases}$

Giải hệ này ta có $S = -6$ và $P = 11$ hoặc $S = 3$ và $P = 2$.

- Với $S = -6$ và $P = 11$, ta thu được hệ 2 ẩn x, y vô nghiệm.
- Với $S = 3$ và $P = 2$, ta thu được hệ hai ẩn x, y có hai nghiệm (1; 2) và (2; 1).

Vậy hệ ban đầu có hai nghiệm (1; 2) và (2; 1).

b) Đặt $z = -x$ ta đưa hệ về hệ đối xứng với ẩn z, y. từ đó dùng cách đặt ẩn phụ $S = z + y$, $P = z.y$ ta đưa về hệ hai ẩn S, P. Tìm S, P từ hệ này sau đó tìm x, y với S, P tìm được. Hệ có hai nghiệm: (0; 1) và (−1; 0)

c) Trừ vế với vế của hai phương trình trong hệ ta có phương trình:

$(x - y)(x + y - 1) = 0$

Như vậy hệ ban đầu tương đương với hai hệ sau:

• $\begin{cases} x = y \\ x^2 - 3x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$

• $\begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - 3x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - 3x = 2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy hệ ban đầu có 4 nghiệm: (0; 0); (5; 5); (–1; 2); (2; –1).

Bài 3. Tìm quan hệ giữa S và P để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + y = S \\ x.y = P \end{cases}$$

Hướng dẫn:

Ta có: $\begin{cases} x + y = S \\ x.y = P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = S - x \\ x^2 - Sx + P = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Hệ có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ có nghiệm, điều này tương đương với $S^2 \geq 4P$

Bài 4. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 55 \\ xy = 24 \end{cases}$

Hướng dẫn:

a) Ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 208 \\ xy = 96 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 400 \\ xy = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = -20 \\ xy = 96 \end{cases}$

• $\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 - y \\ y^2 - 20y + 96 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 12 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 12 \\ y = 8 \end{cases}$

• $\begin{cases} x + y = -20 \\ xy = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -20 - y \\ y^2 + 20y + 96 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -8 \\ y = -12 \end{cases}$

Hệ có 4 nghiệm: (8; 12); (12; 8); (–12; –8); (–8; –12)

b) Đáp số: (8; 3); (–8; –3) là hai nghiệm của hệ.

Bài 5. Tìm hàm số bậc hai y = f(x) thỏa mãn các điều kiện sau:

a) Parabol y = f(x) cắt trục tung tại điểm (0; –4);

b) f(2) = 6

c) Phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm và hiệu giữa nghiệm lớn và nghiệm bé bằng 5.

Giải

Gọi hàm số bậc hai có dạng: $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Do thỏa mãn điều kiện (a) nên ta có ngay $c = -4$. Mặt khác $f(2) = 6$ nên ta có: $6 = 4a + 2b + c$ hay $2a + b = 5$ (1)

$f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow b^2 + 16a > 0$

Gọi các nghiệm là x_1, x_2 ta có:

$$|x_1 - x_2| = 5 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 25 \quad (2)$$

Ta có: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{4}{a}$ nên (2) trở thành:

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{16}{a} = 25 \Leftrightarrow b^2 + 16a = 25a^2 \quad (2)$$

Giải hệ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -\frac{25}{21} \\ b = \frac{155}{21} \end{cases}$ cả hai nghiệm này đều thỏa điều kiện $b^2 + 16a > 0$. Có hai hàm số bậc hai cần tìm là:

$$y = x^2 + 3x - 4; \quad y = -\frac{25}{21}x^2 + \frac{155}{21}x - 4$$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 6. Giải hệ sau:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + y - xy = 1 \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 2 \end{cases}$

Bài 7. Giải $\begin{cases} |x - y| + y^2 = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$

Bài 8. Giải $\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x + y + xy} = 0 \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$

Bài 9*. Giải a) $\begin{cases} 2x^2 = y + \frac{1}{y} \\ 2y^2 = x + \frac{1}{x} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3 - 3x = y^3 - 3y \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 6. (Học sinh tự giải)

Bài 7. Xét hai trường hợp:

* Nếu $x - y \geq 0$ hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + y^2 = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ (I)

* Nếu $x - y < 0$ hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} -(x-y) + y^2 = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ (II)

Giải (I) và (II) $\Rightarrow$ nghiệm của hệ đã cho.

Bài 8. Đk: $x + y + xy \geq 0$ (*)

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = x + y + xy \\ x + y - xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = (x+y) + 3xy \\ x + y - xy = 1 \end{cases}$

Đặt $S = x + y$, $P = xy$ từ đó $\Rightarrow$ hệ phương trình đối với S, P giải hệ này ta tính được S, P $\Rightarrow$ nghiệm hệ đã cho.

Bài 9. a) Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2yx^2 = y^2 + 1 \\ 2xy^2 = x^2 + 1 \end{cases}$

Trừ từng vế 2 phương trình trên ta có:

$(x - y)(x + y + 2xy) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Do $x + y + 2xy > 0$)

Thế $x = y$ vào một trong 2 phương trình đã cho $\Rightarrow$ kết quả.

b) $\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{2}}; -\frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}}; \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)$.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III.

I. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Phương trình $ax + b = 0$ có thể có nghiệm trong những trường hợp nào?

Giải

$a \neq 0$ hoặc $a = b = 0$

Bài 2. Giả sử ba phương trình $f(x).g(x) = 0$, $f(x) = 0$ và $g(x) = 0$ (với cùng tập xác định) có các tập nghiệm lần lượt là T, T_1 và T_2. Hãy chọn kết luận đúng trong hai kết luận sau:

a) $T = T_1 \cap T_2$; b) $T = T_1 \cup T_2$.

Giải

Kết luận đúng là $T = T_1 \cup T_2$.

Bài 3. Hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ $(a^2 + b^2 \neq 0$ và $a'^2 + b'^2 \neq 0)$

Có thể có nghiệm trong những trường hợp nào?

Áp dụng: Tìm a để hệ phương trình $\begin{cases} ax + y = a^2 \\ x + ay = 1 \end{cases}$ có nghiệm.

Giải

Vì các phương trình trong hệ đều là những phương trình bậc nhất hai ẩn số nên hệ có nghiệm $\Leftrightarrow D \neq 0$ hoặc $D = D_x = D_y = 0$.

• Áp dụng: ta có $D = a^2 - 1$; $D_x = a^3 - 1$; $D_y = a(1 - a)$ nên áp dụng kết luận trên (vì hệ thỏa mãn các điều kiện trên) ta có 2 trường hợp để có nghiệm.

• $D \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$ và $a \neq -1$.

• $D = D_x = D_y = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Tóm lại hệ có nghiệm khi và chỉ khi $a \neq -1$.

Bài 4. Biết rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có một nghiệm kép x_0. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ có thể viết dưới dạng bình phương của một nhị thức bậc nhất;

(B) Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh thuộc trục hoành;

(C) Phương trình $ax^2 + bx = c = 0$ cũng có một nghiệm kép là $\frac{1}{x_0}$.

Giải

Mệnh đề đúng là parabol có đỉnh thuộc trục hoành.

Bài 5. Giải và biện luận phương trình $m(mx - 1) = x + 1$

Giải

Viết phương trình dưới dạng tương đương: $x(m^2 - 1) = m + 1$

• Nếu $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{m - 1}$.

• Nếu $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -1$

Với $m = 1$ thì phương trình vô nghiệm

Với $m = -1$ thì phương trình có tập nghiệm là R.

- Kết luận:

• $m \neq 1$ và $m \neq -1$ phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{m - 1}$

• $m = 1$, phương trình vô nghiệm

• $m = -1$, phương trình có tập nghiệm là R.

Bài 6. Cho phương trình $p(x + 1) - 2x = p^2 + p - 4$. Tìm các giá trị của p để:

a) Phương trình nhận 1 làm nghiệm;

b) Phương trình có nghiệm;

c) Phương trình vô nghiệm.

Giải

Đưa phương trình về dạng tương đương: $x(p - 2) = p^2 - 4$

a) Phương trình nhận 1 làm nghiệm $\Leftrightarrow p - 2 = p^2 - 4 \Leftrightarrow p^2 - p - 2 = 0$ $\Leftrightarrow p = -1$ hoặc $p = 2$.

b) Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow p - 2 \neq 0$ hoặc $p - 2 = 0$ và $p^2 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow p \neq 2$ hoặc $p = 2 \Leftrightarrow$ p tùy ý thuộc R.

c) Từ câu b) suy ra không tồn tại p để phương trình vô nghiệm.

Bài 7. Ba cạnh của một tam giác vuông có độ dài là 3 số tự nhiên liên tiếp. Tính độ dài của chúng.

Đáp số: 3; 4; và 5.

Bài 8. Cho phương trình $(m - 1)x^2 + 2x - 1 = 0$

a) Giải và biện luận phương trình.

b) Tìm các giá trị của m sao cho phương trình có hai nghiệm khác dấu.

c) Tìm các giá trị của m sao cho tổng bình phương hai nghiệm của nó bằng 1.

Giải

a) Trường hợp 1: $m = 1$, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2: $m \neq 1$, $\Delta' = 1 + m - 1 = m$.

- Nếu $m < 0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 0$ thì phương trình có nghiệm kép $x = 1$.
- Nếu $0 < m \neq 1$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{m}}{m - 1}; \; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{m}}{m - 1}.$$

Kết luận: $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 1$.

$m = 1$, phương trình có nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

$m < 0$, phương trình vô nghiệm.

$0 < m \neq 1$, phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 ở trên.

b) Phương trình có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -\frac{1}{m - 1} < 0$

$\Leftrightarrow \; m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$

c) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm là: $0 < m \neq 1$. Gọi hai nghiệm là x_1, x_2. Theo định lí Vi–ét ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{m - 1}; \; x_1.x_2 = -\frac{1}{m - 1}$$

Do vậy: $x_1^2 + x_2^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{(m - 1)^2} + \frac{2}{m - 1} = 1$$

Giải phương trình này ta được $m = 2 - \sqrt{5}$; $m = 2 + \sqrt{5}$.

Do điều kiện $0 < m \neq 1$ nên chỉ $m = 2 + \sqrt{5}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 9. Với giá trị nào của a thì hai phương trình sau có nghiệm chung:

$x^2 + x + a = 0$ và $x^2 + ax + 1 = 0$

Giải

Nếu hai phương trình có nghiệm chung x_0 thì xảy ra:

$x_0^2 + x_0 + a = x_0^2 + ax_0 + 1 \Rightarrow (x_0 - 1)(1 - a) = 0$

$\Rightarrow$ $x_0 = 1$ hoặc $a = 1$.

• Nếu $x_0 = 1$ thì do $x^2_0 + x_0 + a = 0$, suy ra $a = -2$.

Vậy, nếu hai phương trình có nghiệm chung thì $a = -1$ hoặc $a = 1$.

Ngược lại, nếu $a = -2$, kiểm tra được hai phương trình có nghiệm chung là $x = 1$. Còn nếu $a = -1$ thì 2 phương trình cùng vô nghiệm nên chúng không có nghiệm chung.

Vậy $a = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 10. Cho các phương trình:

$x^2 + 3x - m + 1 = 0$ (1) và $2x^2 - x + 1 - 2p = 0$ (2)

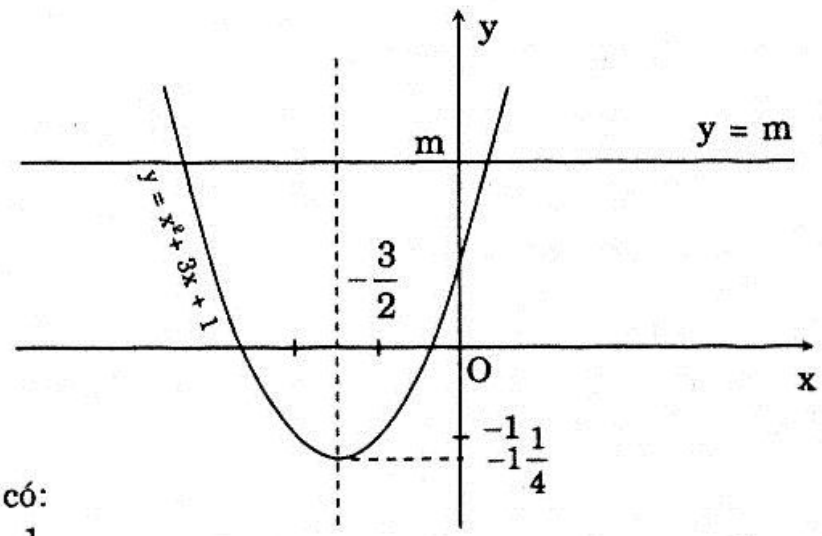
a) Biện luận số nghiệm của mỗi phương trình bằng đồ thị.

b) Kiểm tra lại kết quả trên bằng phép tính.

Giải

a) • (1) $x^2 + 3x + 1 = m$. Từ đây ta suy ra, số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của Parabol $y = x^2 + 3x + 1$ và đường thẳng $y = m$ (là đường thẳng song song hoặc trùng trục hoành, cắt Oy tại điểm (0; m)).

Đồ thị của hàm số $y = x^2 + 3x + 1$ ở hình vẽ dưới đây.



Từ đồ thị ta có:

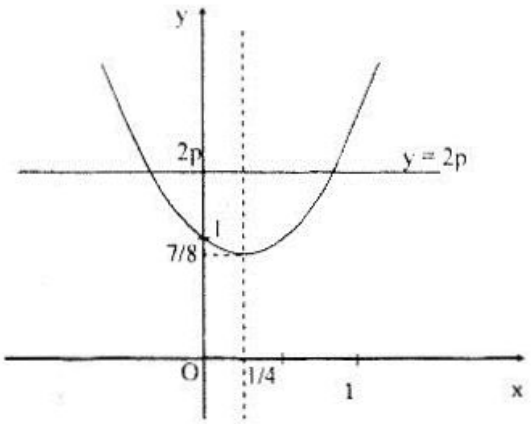
• Nếu $m < -1\frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.

• Nếu $m = -1\frac{1}{4}$ thì (1) có nghiệm kép $x = -\frac{3}{2}$

• Nếu $m > -1\frac{1}{4}$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt.

• (2) $\Leftrightarrow$ $2x^2 - x + 1 = 2p$. Từ đây suy ra số nghiệm của (2) chính là số giao điểm của parabol $y = 2x^2 - x + 1$ và đường thẳng $y = 2p$ (là đường thẳng song song hoặc trùng Ox, cắt Oy tại điểm (0; 2p)).

Đồ thị của hàm số $y = 2x^2 - x + 1$ được cho ở hình dưới đây:



Từ đồ thị ta có:

- Nếu $2p < \frac{7}{8} \Leftrightarrow p < \frac{7}{16}$ thì (2) vô nghiệm.
- Nếu $2p = \frac{7}{8} \Leftrightarrow p = \frac{7}{16}$ thì (2) có nghiệm kép $x = \frac{1}{4}$.
- Nếu $2p > \frac{7}{8} \Leftrightarrow p > \frac{7}{16}$ thì (2) có hai nghiệm phân biệt.

b) • Xét phương trình (1), có : $\Delta_1 = 9 + 4m - 4 = 4m + 5$.

- Nếu $4m + 5 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{5}{4} = -1\frac{1}{4}$ thì (1) vô nghiệm.
- Nếu $4m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -1\frac{1}{4}$ thì (1) có nghiệm kép.
- Nếu $4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -1\frac{1}{4}$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt.

Rõ ràng kết quả biện luận bằng đồ thị số nghiệm của (1) và kết quả biện luận số nghiệm của (1) bằng phép tính là như nhau.

- Xét phương trình:

  $2x^2 - x + 1 - 2p = 0$, có $\Delta_2 = 1 - 8 + 16p = 16p - 7$
- Nếu $16p - 7 < 0 \Leftrightarrow p < \frac{7}{16}$ thì (2) vô nghiệm.
- Nếu $16p - 7 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{7}{16}$ thì (2) có nghiệm kép $x = \frac{1}{4}$.
- Nếu $16p - 7 > 0 \Leftrightarrow p > \frac{7}{16}$ thì (2) có hai nghiệm phân biệt.

Ta thấy kết quả biện luận số nghiệm bằng đồ thị và kết quả biện luận số nghiệm của (2) bằng phép tính là như nhau.

Bài 11. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2(x + y)^2 - xy = 1 \\ x^2y + xy^2 = 0 \end{cases}$.

Giải

a) Đặt $x + y = S$, $x.y = P$, ta đưa hệ về hệ với hai ẩn S, P như sau:

$$\begin{cases} S^2 - P = 7 \\ S^2 - 3P = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 \\ S = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} P = 2 \\ S = -3 \end{cases}$$

• Với P = 2, S = 3 ta có hệ:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x.y = 2 \end{cases}$$, hệ này có hai nghiệm (1; 2); (2; 1)

• Với P = 2, S = –3 ta có hệ: $\begin{cases} x + y = -3 \\ x.y = 2 \end{cases}$, hệ này có hai nghiệm (–1; –2); (–2; –1)

Từ đó, hệ đã cho có 4 nghiệm (1; 2); (2; 1); (–1; –2) và (–2; –1).

b) Cũng tương tự như phép giải hệ ở câu a), bằng cách đặt $S = x + y$, $P = x.y$ rồi tìm S và P, sau đó tìm x, y từ S và P đã có. Ta đi đến hệ có sáu nghiệm sau: $(1; -1); (-1; 1); (0; \frac{1}{\sqrt{2}}); (0; -\frac{1}{\sqrt{2}}); (\frac{1}{\sqrt{2}}; 0); (-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)$.

Bài 12. Giải và biện luận các hệ sau:

a) $\begin{cases} mx + 3y = m - 1 \\ 2x + (m - 1)y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 5x + (a - 2)y = a \\ (a + 3)x + (a + 3)y = 2a \end{cases}$.

Giải

Ta tính được: $D = m^2 - m - 6 = (m - 3)(m + 2)$;

$D_x = (m - 4)(m + 2)$; $D_y = m + 2$

Từ đó ta có: • Nếu $m \neq 3$ và $m \neq -2$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{m - 4}{m + 3}; \frac{1}{m - 3}\right)$.

• Nếu m = 3 thì hệ vô nghiệm.

• Nếu m = –2 hệ có vô số nghiệm (x; y) được tính theo công thức:

$$\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{2}{3}x - 1 \end{cases}$$

b) Ta tính được: $D = -(a + 3)(a - 7)$; $D_x = -a(a - 7)$; $D_y = -a(a - 7)$.

Từ kết quả đó, ta có:

• Nếu $a \neq -3$ và $a \neq 7$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\left(\frac{a}{a + 3}; \frac{a}{a + 3}\right)$

• Nếu a = –3 thì hệ vô nghiệm.

• Nếu a = 7 thì hệ có vô số nghiệm (x; y) được tính theo công thức:

$$\begin{cases} x \in R \\ y = -x + \frac{7}{5} \end{cases}$$

Bài 13. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = m \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$

Giải

a) Theo định lí Vi-ét đảo, x và y là hai nghiệm của phương trình

$t^2 - 4t + m = 0$ (*)

Ta có $\Delta' = 4 - m$. Do đó:

- Nếu $m > 4$ thì $\Delta' < 0$, (*) vô nghiệm, nên hệ đã cho vô nghiệm.
- Nếu $m = 4$ thì $\Delta' = 0$, (*) có nghiệm kép $t_1 = t_2 = 2$, tức là hệ ban đầu có nghiệm (2; 2)
- Nếu $m < 4$ thì $\Delta' > 0$, hệ có hai nghiệm phân biệt:

$t_1 = 2 - \sqrt{4 - m}$; $t_2 = 2 + \sqrt{4 - m}$

Vì vậy hệ có hai nghiệm

$(2 - \sqrt{4 - m}\,;\, 2 + \sqrt{4 - m}\,)$; $(2 + \sqrt{4 - m}\,;\, 2 - \sqrt{4 - m}\,)$.

b) Từ phương trình đầu của hệ ta có: $2y = 3x - 1$, thế vào phương trình còn lại ta có: $13x^2 - 6x - 4m + 1 = 0$ (**)

Phương trình (**) có $\Delta' = 4(13m - 1)$. Do đó:

- Nếu $4(13m - 1) < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{1}{13}$ thì (**) vô nghiệm.
- Nếu $m = \dfrac{1}{13}$ thì (**) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = \dfrac{3}{13}$, dẫn đến hệ có một nghiệm $\left(\dfrac{3}{13}; -\dfrac{2}{13}\right)$.
- Nếu $m < \dfrac{1}{13}$, thì (**) có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{3 + 2\sqrt{13m - 1}}{13}; \quad x_2 = \frac{3 - 2\sqrt{13m - 1}}{13}.$$

Nếu hệ có hai nghiệm (x; y) sau:

$$\left(\frac{3 - 2\sqrt{13m - 1}}{13}; \frac{-2 - 3\sqrt{13m - 1}}{13}\right); \left(\frac{3 + 2\sqrt{13m - 1}}{13}; \frac{-2 + 3\sqrt{13m - 1}}{13}\right).$$

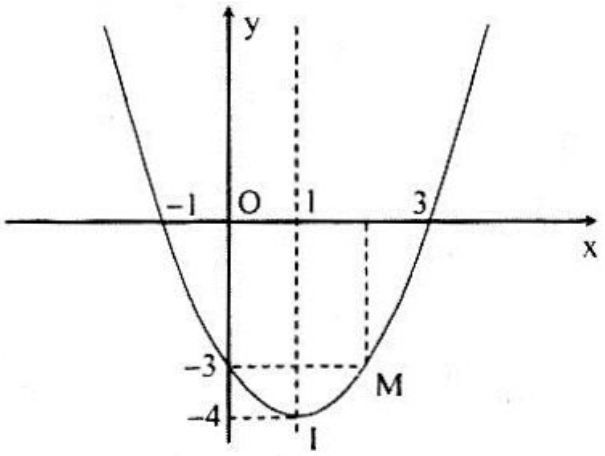
Bài 14. Tìm a, b và c để Parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là I(1; −4) và đi qua điểm M(2; −3). Hãy vẽ Parabol nhận được.

Giải

Từ giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases} b = -2a \\ 16a = b^2 - 4ac \\ 4a + 2b + c = -3 \end{cases}$$

Giải hệ này ta có a = 1; b = –2; c = –3. Suy ra hàm số cần tìm có dạng: $y = x^2 - 2x - 3$. Parabol này có hình dạng ở hình dưới đây:



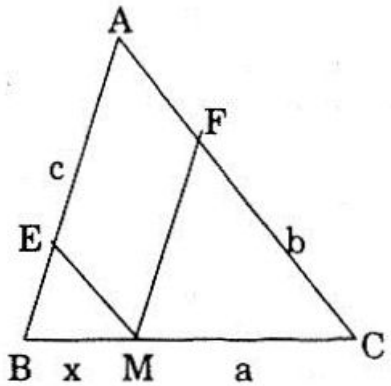
Bài 15. Cho tam giác ABC có BC = a; AC = b; AB = c. Ta lấy một điểm M trên cạnh BC. Qua M, ta kẻ các đường thẳng ME và MF thứ tự song song với các cạnh AC và AB (E ∈ AB, F ∈ AC). Hỏi phải lấy điểm M cách B bao nhiêu để tổng ME + MF = l (l là độ dài cho trước)? Biện luận theo l, a, b và c.

Giải

Đặt x = AM (0 < x < a). Theo định lí Talét ta có:

$$\frac{ME}{x} = \frac{b}{a} \Rightarrow ME = \frac{bx}{a};$$

$$\frac{MF}{c} = \frac{a - x}{a} \Rightarrow MF = \frac{c(a - x)}{a}$$



Từ giả thiết cho ME + MF = l, ta có phương trình:

$$l = \frac{bx}{a} + \frac{c(a - x)}{a} \Leftrightarrow (b - c)x = a(l - c) \quad (*)$$

• Nếu b = c (ΔABC cân tại A) và $l \neq c$ thì (*) vô nghiệm. Điều này có nghĩa: Khi tam giác ABC cân tại A và $l \neq$ AB thì không có điểm M nào trên cạnh BC cũng thỏa mãn điều kiện bài toán.

• Nếu b = c và l = c thì (*) nghiệm đúng với mọi x. Điều đó có nghĩa là khi tam giác ABC cân ở A và l = c = AB thì mọi điểm M nào trên cạnh BC đều thỏa mãn điều kiện bài toán.

• Nếu ΔABC không cân và điều kiện $c < \ell < b$ và $c > \ell > b$ không được thỏa mãn thì không tồn tại M như bài toán yêu cầu.

• Nếu b ≠ c (ΔABC không cân ở A) thì (*) có nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{a(l - c)}{b - c}$$

Xét điều kiện $0 < x < a$, ta có:

$$0 < x < a \Leftrightarrow 0 < \frac{a(l-c)}{b-c} < a \Leftrightarrow 0 < \frac{l-c}{b-c} < 1 \quad (**)$$

Vì $b \neq c$ nên có hai khả năng xảy ra:

Khả năng 1: $b > c$, ta có $(**) \Leftrightarrow c < l < b$

Khả năng 2: $b < c$, ta có $(**) \Leftrightarrow b < l < c$

Hai kết quả này có nghĩa là giá trị $x = \frac{a(l-c)}{b-c}$ là nghiệm của bài toán (điểm M cách B một khoảng $\frac{a(l-c)}{b-c}$ khi và chỉ khi độ dài l nằm giữa các độ dài b và c).

II. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 16. Tìm nghiệm gần đúng của các phương trình sau (chính xác đến hàng phần nghìn)

a) $-4x^2 + 2\sqrt{7}x - 1 = 0$; **b)** $x^2 - 11x + 29 = 0$.

Bài 17. Cho phương trình: $2(x^2 - 1) = x(px + 1)$

a) Tìm p để phương trình nhận $x = 1$ làm nghiệm.

b) Tìm p để phương trình có duy nhất nghiệm.

Bài 18. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 31 \\ x^2 - y^2 - xy = 11 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x \\ 2y^2 + xy = 3y \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} 4x^2 = 3y + \frac{1}{y} \\ 4y^2 = 3x + \frac{1}{x} \end{cases}$.

Bài 19. Giải các phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ:

a) $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$; **b)** $\sqrt{1-x} + \sqrt{3+x} + \sqrt{-x^2 - 2x + 3} = 2$

c) $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} - \sqrt[3]{(7+x)(2-x)} = 3$

III. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 16. a) $x_1 \approx 1{,}094$; $x_2 \approx 0{,}028$. **b)** $x_1 \approx 4{,}382$; $x_2 \approx 6{,}618$.

Bài 17.

a) $p = -1$.

b) $p = 2$, nghiệm duy nhất $x = -2$;

$p = \frac{17}{8}$, nghiệm duy nhất $x = -4$.

Bài 18.

a) Đặt $x + y = S$, $x.y = P$, ta có hệ: $\begin{cases} S + P = 11 \\ S.P = 30 \end{cases}$

Từ đây tìm được S, P sau đó giải tìm x, y; cuối cùng ta có các nghiệm của hệ ban đầu là: (1; 5); (5; 1); (2; 3); (3; 2).

b) Hệ có hai nghiệm: (5; 2); (−5; −2).

c) Trừ vế với vế phương trình đầu trong hệ cho phương trình thứ hai ta có: $(x - y)(2x + 2y - 3) = 0$, từ đó hệ ban đầu tương đương với:

$$\begin{cases} x = y \\ 2y^2 + xy = 3y \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 2x + 2y - 3 = 0 \\ 2x^2 + xy = 3y \end{cases};$$

Giải các hệ này ta có các nghiệm là: (0; 0), $(0; \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}; 0)$, (1; 1).

d) Hệ có đúng một nghiệm (1; 1).

Bài 19. a) Phương trình có hai nghiệm: $x = 1$, $x = -1$.

b) Đặt $\sqrt{1 - x} + \sqrt{3 + x} = t$, $(t \geq 0)$

Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

c) Đặt $u = \sqrt[3]{2 - x}$; $v = \sqrt[3]{7 + x}$

Nghiệm của phương trình là $x = 1$ hoặc $x = -6$.

Chương IV

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa

Giả sử A và B là hai biểu thức số (biểu thức chứa số và các phép toán; đặc biệt A và B có thể là hai số).

Các mệnh đề "A > B", "A < B", "A ≥ B" và "A ≤ B" được gọi là các bất đẳng thức. Trong bất đẳng thức A > B, ta gọi A là vế trái, B là vế phải của bất đẳng thức.

2. Tính chất của bất đẳng thức

a) $A > B$ và $B > C \Rightarrow A > C$ (Tính chất bắc cầu).

b) $A > B \Leftrightarrow A + C > B + C$.

c) $A > B \Leftrightarrow \begin{cases} AC > BC \text{ nếu } C > 0 \\ AC < BC \text{ nếu } C < 0 \end{cases}$

d) $A > B$ và $C > D \Rightarrow A + C > B + D$.

e) $A > B > 0$ và $C > D > 0 \Rightarrow A . C > B . D$.

g) $A > B > 0$, $n \in N^* \Rightarrow A^n > B^n$.

h) $A > B > 0 \Rightarrow \sqrt{A} > \sqrt{B}$ và $\sqrt[3]{A} > \sqrt[3]{B}$.

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối

Đối với hai số a, b tùy ý, ta có:

- $|a + b| \le |a| + |b|$; $|a + b| = |a| + |b|$ khi và chỉ khi $ab \ge 0$.
- $||a| - |b|| \le |a - b|$; $||a| - |b|| = |a - b|$ khi và chỉ khi $ab \ge 0$.

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân

- Với $a \ge 0$, $b \ge 0$ ta có bất đẳng thức: $\frac{a + b}{2} \ge \sqrt{ab}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.
- Với $a \ge 0$, $b \ge 0$ và $c \ge 0$ ta có bất đẳng thức: $\frac{a + b + c}{3} \ge \sqrt[3]{a . b . c}$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.
- Áp dụng:
  a) Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.
  b) Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Chứng minh rằng nếu $a > b$ và $ab > 0$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Giải

Nếu $a > b$ và $ab > 0$ ta suy ra $b < a$ và $\frac{1}{ab} > 0$.

Ta có: $\frac{1}{a} = \frac{1}{ab} . b < \frac{1}{ab} . a = \frac{1}{b}$ hay $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Bài 2. Chứng minh rằng nửa chu vi của tam giác lớn hơn mỗi cạnh của tam giác đó.

Giải

Giả sử tam giác ABC có AB = c, BC = a, AC = b. Gọi p là nửa chu vi tam giác, ta có $p = \frac{a + b + c}{2}$. Ta chỉ cần chứng minh cho $p > a$, các bất đẳng thức còn lại chứng minh tương tự. Thật vậy:

$$a < p \Leftrightarrow a < \frac{a + b + c}{2} \Leftrightarrow \frac{b + c - a}{2} > 0.$$

Vì trong tam giác tổng hai cạnh bất kì luôn lớn hơn cạnh kia nên $b + c > a \Leftrightarrow b + c - a > 0$ hay $\frac{b + c - a}{2} > 0$ là bất đẳng thức đúng, suy ra $p > a$ là đúng.

Bài 3. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ với mọi các số thực a, b, c. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Giải

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$

$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ bất đẳng thức này là đúng nên bất đẳng thức ban đầu là đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a - b)^2 = 0$ và $(b - c)^2 = 0$ và $(c - a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 4. Hãy so sánh các số sau đây:

a) $\sqrt{2000} + \sqrt{2005}$ và $\sqrt{2002} + \sqrt{2003}$

(không dùng bảng số hoặc máy tính).

b) $\sqrt{a + 2} + \sqrt{a + 4}$ và $\sqrt{a} + \sqrt{a + 6}$ $(a \geq 0)$.

Giải

Ta sẽ chứng minh $\sqrt{2003} + \sqrt{2005} < \sqrt{2002} + \sqrt{2003}$ (*)

Thật vậy (*) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $2000 + 2005 + 2\sqrt{2000.2005} < 2002 + 2003 + 2\sqrt{2002.2003}$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt{2000.2005} < \sqrt{2002.2003} \Leftrightarrow 2000 . 2005 < 2002 . 2003$

$\Leftrightarrow$ $4010000 < 4010006$ là bất đẳng thức đúng nên (*) đúng.

b) Ta sẽ chứng minh $\sqrt{a + 2} + \sqrt{a + 4} > \sqrt{a} + \sqrt{a + 6}$ (**) với $a \geq 0$

Thật vậy, (**) $\Leftrightarrow$ $2a + 6 + 2\sqrt{(a+2)(a+4)} > 2a + 6 + 2\sqrt{a(a+6)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 6a + 8} > \sqrt{a^2 + 6a}$ $\Leftrightarrow 8 > 0$ bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, nên (**) đúng.

Bài 5. Chứng minh rằng, nếu $a > 0$, $b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

Giải

Với $a > 0$, $b > 0$ ta có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$

$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng $\Rightarrow$ bất đẳng thức đã cho là đúng. Dấu bằng xảy ra khi $a = b > 0$.

Bài 6. Chứng minh rằng nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

Giải

Ta có $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ $\Leftrightarrow$ $(a+b)(a^2 - 2ab + b^2) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$.

Vì $(a-b)^2 \geq 0$ nên nếu $a \geq 0$, $b \geq 0$ thì $(a+b)(a-b)^2 \geq 0$ là bất đẳng thức đúng.

Nếu $a \geq 0$ và $b \geq 0$ thì $(a+b)(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a + b = 0$ hoặc $a - b = 0$ $\Leftrightarrow a = b$.

Bài 7. Chứng minh rằng $a^2 + ab + b^2 \geq 0$ với mọi số thực a, b.

Giải

Sử dụng đẳng thức $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$ hoặc

$a^2 + ab + b^2 = \left(b + \frac{1}{2}a\right)^2 + \frac{3}{4}a^2$ ta có được điều phải chứng minh.

Bài 8. Chứng minh rằng nếu a, b và c là độ dài ba cạnh một tam giác thì $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Giải

Không mất tính tổng quát ta giả sử $c \leq b \leq a$. Khi đó

$0 < a - b < c$ nên $(a-b)^2 < c^2$, suy ra $a^2 + b^2 < c^2 + 2ab$

$0 < b - c < a$ nên $(b-c)^2 < a^2$, suy ra $b^2 + c^2 < a^2 + 2bc$

$0 < a - c < b$ nên $(a-c)^2 < b^2$, suy ra $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức trên ta đi đến bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 9. Chứng minh rằng nếu $a \geq 0$, $b \geq 0$ thì $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \leq \frac{a^3+b^3}{2}$.

Giải

Bất đẳng thức đã cho tương đương với:

$$a^3 + ab^2 + a^2b + b^3 \leq 2a^3 + 2b^3 \Leftrightarrow a^3 - ab^2 - a^2b + b^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2-b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+b) \geq 0.$$

Vì $a \geq 0$, $b \geq 0$ và $(a-b)^2 \geq 0$ nên bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng. Vì vậy bất đẳng thức ban đầu là đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 10. Chứng minh rằng với hai số a, b, tùy ý, ta có:

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \quad (1).$$ Đẳng thức xảy ra khi nào?

Giải

$$(1) \Leftrightarrow |a-b|(1+|a|+|b|+|ab|) \leq (|a|+|ab|)(1+|a-b|) + (|b|+|ab|)(1+|a-b|)$$

$$\Leftrightarrow |a-b| + |a(a-b)| + |b(a-b)| + |ab||a-b| \leq |a| + |b| + 2|ab| + 2|ab||a-b| + |a(a-b)| + |b(a-b)|$$

$$\Leftrightarrow |a-b| \leq |a| + |b| + 2|ab| + |ab(a-b)| \quad (2)$$

Ta có: $|a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$

Do vậy (2) hiển nhiên đúng.

Dấu đẳng thức xảy ra ở (1) $\Leftrightarrow$ dấu đẳng thức xảy ra ở (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a-b| = |a| + |b| \\ 2|ab| + |ab(a-b)| = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a = 0 \\ b = 0 \end{bmatrix}$$

Bài 11. Chứng minh rằng:

a) Nếu a, b là hai số cùng dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

b) Nếu a, b là hai số trái dấu thì $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

Giải

a) Vì a, b cùng dấu nên $\frac{a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng của hai số không âm không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$ (vì a, b cùng dấu).

b) a, b trái dấu nên –a, b cùng dấu. Áp dụng câu a) ta có:

$$-\frac{a}{b}+\left(-\frac{b}{a}\right)\geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = -b$ (vì a, b trái dấu).

Bài 12. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = (x + 3)(5 - x)$ với $-3 \leq x \leq 5$.

Giải

Vì $x \in [-3; 5]$ nên $x + 3 \geq 0$ và $5 - x \geq 0$. Khi đó ta có:

$$4 = \frac{x+3+5-x}{2} \geq \sqrt{(x+3)(5-x)} \Leftrightarrow 16 \geq (x+3)(5-x) = f(x).$$

Từ bất đẳng thức trên suy ra f(x) lớn nhất bằng 16 khi và chỉ khi $x + 3 = -x + 5$ và $x \in [-3; 5] \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có $f(x) \geq 0\ \forall x \in [-3; 5]$. Mặt khác $f(-3) = f(5) = 0$ nên giá trị bé nhất của f(x) là 0 khi và chỉ khi $x = -3$ hoặc $x = 5$.

Bài 13. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$ với $x > 1$.

Giải

Ta viết $f(x) = (x - 1) + \frac{2}{x-1} + 1$.

Vì $x > 1$ nên $x - 1 > 0$, do đó $\frac{2}{x-1} > 0$ nên

$$(x-1)+\frac{2}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1)\frac{2}{x-1}} = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow f(x) \geq 2\sqrt{2} + 1 \Rightarrow$ giá trị bé nhất của f(x) là $2\sqrt{2} + 1$ khi và chỉ khi

$$x - 1 = \frac{2}{x-1} \text{ và } x > 1 \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}.$$

LUYỆN TẬP

Bài 14. Chứng minh rằng a, b, c là ba số dương thì:

$$\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a} \geq 3abc$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương $\frac{a^4}{b}, \frac{b^4}{c}, \frac{c^4}{a}$ ta có:

$$\frac{a^4}{b}+\frac{b^4}{c}+\frac{c^4}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^4}{b}\cdot\frac{b^4}{c}\cdot\frac{c^4}{a}} = 3abc.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Bài 15. Một khách hàng đến một cửa hàng bán hoa quả mua 2kg cam đã yêu cầu cầu hai lần. Lần đầu, người bán hàng đặt quả cân 1 kg lên đĩa cân bên phải và đặt cam lên đĩa cân bên trái cho đến khi cân thăng bằng và lần sau, đặt quả cân 1kg lên đĩa cân bên trái và cam lên đĩa cân bên phải cho đến khi cân thăng bằng. Nếu cái cân đĩa đó không

chính xác (do hai cánh tay đòn dài, ngắn khác nhau) nhưng quả cân là đúng 1kg thì khách hàng có mua được đúng 2kg cam hay không? Vì sao?

Giải

Gọi x, y theo thứ tự là độ dài cánh tay đòn bên phải và bên trái của cái cân đĩa ($x > 0, y > 0$). Trong lần cân đầu tiên, khối lượng cam được cân là (kg). Trong lần cân thứ hai, khối lượng cam được cân là y(kg). Do đó khối lượng cam được cân cả hai lần là $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$(kg). Nếu cái cân đĩa đó không chính xác, tức là $x \neq y$, thì do: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} > 2$. Nên khách hàng mua được nhiều hơn 2kg.

Bài 16. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}<1$;

b) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$.

Giải

a) Với $\forall k \in N^*$ ta có: $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Khi đó:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$= 1-\frac{1}{n+1} < 1$$

b) Ta có $\forall k \in N^*, k \geq 2$ thì $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$. Do vậy:

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2} < 1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n-1)}$. Mặt khác:

$$1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n-1)} = 1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

$$= 2-\frac{1}{n} < 2$$

nên $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{n^2}<2$.

Bài 17. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$A = \sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$

Giải

Dễ thấy A được xác định khi $1 \leq x \leq 4$ và $A > 0$. ta có

$A^2 = 3 + 2\sqrt{(x-1)(4-x)} \geq 3 \Rightarrow A \geq \sqrt{3}$. Vậy giá trị bé nhất của A là $\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $x = 1$ hoặc $x = 4$.

Ta có: $\frac{3}{2} = \frac{x-1+4-x}{2} \geq \sqrt{(x-1)(4-x)}$ nên ta suy ra:

$$A^2 \le 3 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 6 \Rightarrow A \le \sqrt{6}.$$

$\Rightarrow$ Giá trị lớn nhất của A là $\sqrt{6}$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x - 1 = 4 - x \\ 1 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Bài 18. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, ta có:

$(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2)$

Giải

Khai triển bất đẳng thức đã cho ở cả hai vế sau đó thu gọn ta được bất đẳng thức tương đương: $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$.

Đây là bất đẳng thức ở bài 3, §1 chương 4 đã được chứng minh.

Bài 19. Chứng minh rằng nếu a, b, c, d là 4 số không âm thì:

$$\left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^4 \ge abcd.$$

Giải

Ta có: $\left(\frac{a + b + c + d}{4}\right)^4 = \left(\frac{\frac{a + b}{2} + \frac{c + d}{2}}{2}\right)^4 \ge \left(\frac{\sqrt{ab} + \sqrt{cd}}{2}\right)^4$

$$\ge \left(\frac{2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{cd}}}{2}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{abcd}\right)^4 = abcd.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} a = b \\ c = d \\ \sqrt{ab} = \sqrt{cd} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = d.$

Bài 20. Chứng minh rằng:

a) Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $|x + y| \le \sqrt{2}$;

b) Nếu $4x - 3y = 15$ thì $x^2 + y^2 \ge 9$.

Giải

a) Nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $|x + y| \le \sqrt{2}$.

Ta có $(x + y)^2 = (1.x + 1.y)^2 \le (1^2 + 1^2)(x^2 + y^2) = \sqrt{2}$

Từ đó suy ra $|x + y| \le \sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ hay $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $15^2 = (4x - 3y)^2 \le (4^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \Rightarrow x^2 + y^2 \ge 9$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 15 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = -\frac{9}{5} \end{cases}.$$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 21. Chứng minh rằng nếu a, b, c và d dương thì:

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} > 1$$

Bài 22. Chứng minh rằng với 5 số a, b, c, d và e bất kì, bao giờ ta cũng có bất đẳng thức: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e)$.

Bài 23*. Cho x, y, z là những số dương thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Hãy tìm giá trị bé nhất của biểu thức:

$$M = \sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{z^2 + zx + x^2}.$$

Bài 24*. Cho $0 < a, b, c < 1$. Chứng minh có ít nhất một trong các đẳng thức sau đây là sai: $a(1 - b) > \frac{1}{4}$; $b(1 - c) > \frac{1}{4}$; $c(1 - a) > \frac{1}{4}$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 19. Sử dụng $\frac{a}{b+c+d} > \frac{a}{a+b+c+d}$ và các bất đẳng thức tương tự ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 20. Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e)$

$$\Leftrightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(e - \frac{a}{2}\right)^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức này là hiển nhiên đúng. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{2} = b = c = d = e \Leftrightarrow a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

Bài 21. Ta viết M dưới dạng:

$$M = \sqrt{\frac{3(x+y)^2}{4} + \frac{(x-y)^2}{4}} + \sqrt{\frac{3(y+z)^2}{4} + \frac{(y-z)^2}{4}} + \sqrt{\frac{3(z+x)^2}{4} + \frac{(z-x)^2}{4}}$$

Vậy M đạt giá trị bé nhất bằng $\sqrt{3}$ khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 22*. Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng.

§2. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Cho hai hàm số f(x) và g(x) của cùng biến số x có tập xác định lần lượt là D_f, D_g.

   - Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \le g(x)$ và $f(x) \ge g(x)$ được gọi là bất phương trình một ẩn; x là ẩn số của bất phương trình, tập $D = D_f \cap D_g$ được gọi là tập xác định.

   - Số x_0 là nghiệm của bất phương trình $f(x) < g(x)$ nếu nó thỏa mãn tập xác định của bất phương trình và mệnh đề $f(x_0) < g(x_0)$ là đúng.

2. Bất phương trình tương đương và các phép biến đổi tương đương.

   a) Hai bất phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm. Nếu $f_1(x) < g_1(x)$ tương đương với $f_2(x) < g_2(x)$ thì ta viết $f_1(x) < g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) < g_2(x)$.

   b) Phép biến đổi một bất phương trình thành một bất phương trình tương đương được gọi là phép biến đổi tương đương. Có các phép biến đổi tương đương sau:

   - Thực hiện các phép toán trong từng vế nhưng không làm thay đổi tập xác định của bất phương trình ta được bất phương trình tương đương.

   - Thêm vào hai vế của bất phương trình cùng một biểu thức với mọi giá trị của ẩn thỏa mãn tập xác định của bất phương trình được bất phương trình tương đương.

   - Bất phương trình $f(x) < g(x)$ (1) có tập xác định là D. Nếu $h(x) > 0$ $\forall x \in D$ thì bất phương trình $f(x).h(x) < g(x).h(x)$ tương đương với bất phương trình (1). Nếu $h(x) < 0$, $\forall x \in D$ thì bất phương trình $f(x).h(x) > g(x).h(x)$ tương đương với bất phương trình (1).

   - Quy tắc nâng lên lũy thừa bậc lẻ

     $$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^{2n+1} < [g(x)]^{2n+1} \quad (n \in N)$$

   - Quy tắc nâng lên lũy thừa bậc chẵn (nếu f(x), g(x) không âm với mọi x thỏa mãn tập xác định của bất phương trình)

     $$f(x) < g(x) \Leftrightarrow [f(x)]^{2n} < [g(x)]^{2n} \quad (n \in N^*)$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Một bạn tập luận như sau: Do hai vế của bất phương trình $\sqrt{x-1} < |x|$ luôn không âm nên bình phương hai vế ta được bất phương trình tương đương $x - 1 < x^2$. Theo em, hai bất phương trình trên có tương đương không? Vì sao?

Giải

Không tương đương, vì -1 là nghiệm của bất phương trình $x - 1 < x^2$ nhưng -1 không là nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x-1} < |x|$.

Bài 2. Tìm điều kiện xác định (ĐKXĐ) rồi suy ra tập nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x} > \sqrt{-x}$;

b) $\sqrt{x-3} < 1 + \sqrt{x-3}$;

c) $x + \dfrac{1}{x-3} \geq 2 + \dfrac{1}{x-3}$;

d) $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} < \dfrac{2}{\sqrt{x-2}}$.

Giải

a) ĐKXĐ: $x = 0$. Thử $x = 0$ vào bất phương trình ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của bất phương trình suy ra tập nghiệm là rỗng.

b) ĐKXĐ: $x \geq 3$. Với điều kiện xác định trên ta có bất phương trình tương đương $0 < 1 \Rightarrow$ Mọi $x \geq 3$ là nghiệm của bất phương trình. Tập nghiệm là $T = [3; +\infty)$.

c) ĐKXĐ: $x \neq 3$. Với điều kiện xác định đó ta có bất phương trình tương đương $x \geq 2$. Tập nghiệm của bất phương trình là:

$$T = [2; 3) \cup (3; +\infty).$$

d) ĐKXĐ: $x > 2$. Với điều kiện xác định đó ta đưa về bất phương trình tương đương $x < 2$. Từ đây suy ra tập nghiệm $T = \varnothing$.

Bài 3. Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $2x - 1 \geq 0$.

$$2x - 1 + \frac{1}{x-3} \geq \frac{1}{x-3} \quad (1) \quad \text{và} \quad 2x - 1 - \frac{1}{x+3} \geq -\frac{1}{x+3} \quad (2)$$

Giải

Ta có $2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ tập nghiệm $T = [\dfrac{1}{2}; +\infty)$.

- Bất phương trình $2x - 1 + \dfrac{1}{x-3} \geq \dfrac{1}{x-3}$ (1) có ĐKXĐ $x \neq 3$.

  Với ĐKXĐ thì (1)

  $\Leftrightarrow 2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{2}$

  $\Rightarrow$ Tập nghiệm của (1) là: $T_1 = [\dfrac{1}{2}; 3) \cup (3; +\infty)$.

- Tương tự tập nghiệm của bất phương trình (2) là: $T_2 = [\dfrac{1}{2}; +\infty)$.

Vậy bất phương trình $2x - 1 - \dfrac{1}{x+3} \geq \dfrac{1}{x+3}$ tương đương với $2x - 1 \geq 0$.

Bài 4. Trong bốn cặp bất phương trình sau đây, hãy chọn ra tất cả các cặp bất phương trình tương đương (nếu có).

a) $x - 2 > 0$ và $x^2(x - 2) < 0$; **b)** $x - 2 < 0$ và $x^2(x - 2) > 0$;

c) $x - 2 \le 0$ và $x^2(x - 2) \le 0$; **d)** $x - 2 \ge 0$ và $x^2(x - 2) \ge 0$.

Giải

Ta giải các bất phương trình đã cho:

a) • $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2 \Rightarrow$ Tập nghiệm là $T_1 = (2; +\infty)$;

• $x^2(x - 2) < 0 \Leftrightarrow x \ne 0$ và $x < 2$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm là $T_2 = (-\infty; 0) \cup (0; 2)$;

Vậy cặp bất phương trình không tương đương.

b) • $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \Rightarrow$ Tập nghiệm là $T_3 = (-\infty; 2)$;

• $x^2(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x \ne 0$ và $x > 2 \Leftrightarrow x > 2$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm là $T_4 = (2; +\infty)$.

Vậy cặp bất phương trình không tương đương.

c) • $x - 2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2 \Rightarrow$ Tập nghiệm $T_5 = (-\infty; 2]$.

• $x^2(x - 2) \le 0 \Leftrightarrow x - 2 \le 0 \Rightarrow$ Tập nghiệm $T_6 = (-\infty; 2]$.

Vậy cặp bất phương trình tương đương.

d) • $x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2 \Rightarrow$ Tập nghiệm $T_7 = [2; +\infty)$.

• $x^2(x - 2) \ge 0 \Leftrightarrow x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2 \Rightarrow$ Tập nghiệm $T_8 = [2; +\infty)$.

Vậy cặp bất phương trình tương đương.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 5. Các phương trình sau có tương đương không? Vì sao?

a) $3x - 1 > 0$ và $3x + \dfrac{1}{x - 3} - 1 > \dfrac{1}{x - 3}$;

b) $3x - 1 > 0$ và $3x - 1 + \dfrac{1}{x + \sqrt{2}} > \dfrac{1}{x + \sqrt{2}}$;

c) $x - 4 < 0$ và $x^2(x - 4) < 0$;

d) $x - a > 0$ và $(x - a)^2 > 0$ $(a \in R)$.

Bài 6*. Chứng minh rằng tập nghiệm của các bất phương trình sau là tập rỗng.

a) $\sqrt{-x^6 + x^3} + \sqrt{-x^4 + x^2} > \sqrt{2}$;

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{10 - 6x + x^2} < 2$;

c) $\sqrt{x - 2\sqrt{x - 1} + 3} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 4} + 2} < \sqrt{3} + 1,3$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 5. a) Hai bất phương trình không tương đương.

b) Hai bất phương trình tương đương.

c) Hai bất phương trình không tương đương.

d) Hai bất phương trình không tương đương.

Bài 6. a) Ta có: $\sqrt{-x^6 + x^3} + \sqrt{-x^4 + x^2} > \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{-\left(x^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} + \sqrt{-\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} > \sqrt{2} \qquad (1)$$

Vế trái của (1) nhỏ hơn hoặc bằng 1, với mọi $x \in R$, nên (1) vô nghiệm.

b) $\sqrt{4x^2 - 4x + 2} + \sqrt{10 - 6x + x^2} < 2$

$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(2x-1)^2 + 1} + \sqrt{(x-3)^2 + 1} < 2 \qquad (2)$

Vế trái của (2) luôn lớn hơn hoặc bằng 2. Vì vậy bất phương trình vô nghiệm.

c) $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-4} + 2} =$

$= \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2 + 3} + \sqrt{(\sqrt{x-4} - 2)^2 + 2} > \sqrt{3} + \sqrt{2}, \ \forall x \geq 4.$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Bất phương trình bậc nhất là bất phương trình thuộc một trong bốn dạng sau: $ax + b > 0$; $ax + b < 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b \geq 0$, ở đó $a \neq 0$, a và b là các số đã biết và x là ẩn số.
2. Giải và biện luận phương trình $ax + b < 0$ (1)
   - Nếu $a > 0$ thì (1) $\Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.
   - Nếu $a < 0$ thì (1) $\Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$.
   - Nếu $a = 0$ và $b \geq 0$ thì (1) vô nghiệm.
   - Nếu $a = 0$ và $b < 0$ thì (1) có tập nghiệm là R.
3. Một hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn có tập nghiệm bằng giao của tất cả các tập nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Giải các bất phương trình:

a) $\frac{x+2}{3} - x + 1 > x + 3$; **b)** $\frac{3x+5}{2} - 1 \leq \frac{x+2}{3} + x$;

c) $(1 - \sqrt{2})x < 3 - 2\sqrt{2}$; **d)** $(x + \sqrt{3})^2 \geq (x - \sqrt{3})^2 + 2$.

Giải

a) $\frac{x+2}{3} - x + 1 > x + 3$ (1). ĐKXĐ $\forall x \in R$

(1) $\Leftrightarrow x + 2 - 3x + 3 > 3x + 9 \Leftrightarrow 5x < -4 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{5}$

b) $\frac{3x+5}{2} - 1 \le \frac{x+2}{3} + x$ (2). ĐKXĐ $\forall x \in R$

(2) $\Leftrightarrow 3(3x+5) - 1.6 \le (x+2).2 + 6x$

$\Leftrightarrow 9x + 15 - 6 \le 2x + 4 + 6x \Leftrightarrow x \le -5$

c) $(1 - \sqrt{2})x < 3 - 2\sqrt{2}$ (3). ĐKXĐ $\forall x \in R$

(3) $\Leftrightarrow x > \frac{3 - 2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$ (vì $1 - \sqrt{2} < 0$).

d) $(x + \sqrt{3})^2 \ge (x - \sqrt{3})^2 + 2$ (4). ĐKXĐ $\forall x \in R$

(4) $\Leftrightarrow x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 \ge x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{3}x \ge 2 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Bài 2. Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $m(x - m) \le x - 1$; **b)** $mx + 6 > 2x + 3m$;

c) $(x + 1)k + x < 3x + 4$; **d)** $(a + 1)x + a + 3 \ge 4x + 1$.

Giải

a) $m(x - m) \le x - 1$ (1). ĐKXĐ: $\forall x \in R$.

(1) $\Leftrightarrow mx - m^2 \le x - 1 \Leftrightarrow (m - 1)x \le m^2 - 1$

- Nếu $m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$ thì $x \le m + 1$;
- Nếu $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì $x \ge m + 1$;
- Nếu $m = 1$ thì bất phương trình có tập nghiệm là R.

Kết luận. Gọi T_1 là tập nghiệm của (1) khi đó:

$m > 1$, ta có: $T_1 = (-\infty; m + 1]$,

$m < 1$, ta có: $T_1 = [m + 1; +\infty)$;

$m = 1$, ta có: $T_1 = R$.

b) $mx + 6 > 2x + 3m$ (2). ĐKXĐ: $\forall x \in R$.

(2) $\Leftrightarrow (m - 2)x > 3(m - 2)$.

- Nếu $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì (2) $\Leftrightarrow x > 3$;
- Nếu $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$ thì (2) $\Leftrightarrow x < 3$;
- Nếu $m = 2$ thì (2) vô nghiệm.

Kết luận. Gọi T_2 là tập nghiệm của (2). Khi đó:

$m > 2$, ta có: $T_2 = (3; +\infty)$;

$m < 2$, ta có: $T_2 = (-\infty; 3)$;

$m = 2$, ta có: $T_2 = \varnothing$.

c) Nếu $k = 2$ thì $T_3 = R$ (T_3 là tập nghiệm của bất phương trình ở câu c))

Nếu $k > 2$ thì $T_3 = \left(-\infty; \frac{4 - k}{k - 2}\right)$;

Nếu $k < 2$ thì $T_3 = \left(\frac{4 - k}{k - 2}; +\infty\right)$.

d) Gọi T_4 là tập nghiệm của bất phương trình: $(a + 1)x + a + 3 \geq 4x + 1$ ta có kết quả:

- $a = 3$, $T_4 = R$;
- $a > 3$, $T_4 = [\frac{2 + a}{3 - a}; +\infty)$;
- $a < 3$, $T_4 = (-\infty; \frac{2 + a}{3 - a}]$.

Bài 3. Giải các bất phương trình:

a) $\begin{cases} 5x - 2 > 4x + 5 \\ 5x - 4 < x + 2 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 2x + 1 > 3x + 4 \\ 5x + 3 \geq 8x - 9 \end{cases}$.

Đáp số: **a)** Hệ vô nghiệm;

b) Tập nghiệm $T = (-\infty; -3)$.

LUYỆN TẬP

Bài 4. Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $m(x - m) > 2(4 - x)$; **b)** $3x + m^2 \geq m(x + 3)$;

c) $k(x - 1) + 4x \geq 5$; **d)** $b(x - 1) \leq 2 - x$.

Giải

a) Gọi bất phương trình: $m(x - m) > 2(4 - x)$ là bất phương trình (1).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $mx - m^2 > 8 - 2x \Leftrightarrow x(m + 2) > m^2 + 8$ (a)

Biện luận:

- $m = -2 \Rightarrow$ (a) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm.
- $m < -2 \Rightarrow$ (a) $\Leftrightarrow x < \frac{m^2 + 8}{m + 2}$.
- $m > -2 \Rightarrow$ (a) $\Leftrightarrow x > \frac{m^2 + 8}{m + 2}$.

Kết luận:

- $m = -2$, (1) vô nghiệm;
- $m < -2$, (1) có tập nghiệm là $(-\infty; \frac{m^2 + 8}{m + 2})$;
- $m > -2$, (1) có tập nghiệm là $(\frac{m^2 + 8}{m + 2}; +\infty)$.

b) Gọi bất phương trình: $3x + m^2 \geq m(x + 3)$ là bất phương trình (2).

Ta có: (2) $\Leftrightarrow 3x - mx \geq 3m - m^2 \Leftrightarrow x(3 - m) \geq m(3 - m)$ (b)

Biện luận:

- $m = 3 \Rightarrow$ (b) có tập nghiệm là $R \Rightarrow$ (2) có tập nghiệm là R;
- $m < 3 \Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow x \geq m \Rightarrow$ (2) có tập nghiệm là $[m; +\infty)$;
- $m > 3 \Rightarrow$ (b) $\Leftrightarrow x \leq m \Rightarrow$ (2) có tập nghiệm là $(-\infty; m]$.

c) Gọi bất phương trình: $k(x - 1) + 4x \geq 5$ là bất phương trình (3). Khi đó (3) $\Leftrightarrow kx - k + 4x \geq 5 \Leftrightarrow x(k + 4) \geq k + 5$ (c)

- Nếu $k = -4 \Rightarrow$ (c) vô nghiệm $\Rightarrow$ (3) vô nghiệm;

- Nếu $k < -4 \Rightarrow (c) \Leftrightarrow x \le \dfrac{k+5}{k+4}$

  $\Rightarrow$ (3) có tập nghiệm là: $(-\infty; \dfrac{k+5}{k+4}]$;

- Nếu $k > -4 \Rightarrow (c) \Leftrightarrow x \ge \dfrac{k+5}{k+4}$

  $\Rightarrow$ (3) có tập nghiệm là: $[\dfrac{k+5}{k+4}; +\infty)$.

d) Gọi bất phương trình $b(x-1) \le 2 - x$ là bất phương trình (4).
Khi đó (4) $\Leftrightarrow x(b+1) \le 2 + b$ (d)

- Nếu $b = -1 \Rightarrow$ (d) có tập nghiệm R $\Rightarrow$ (4) có tập nghiệm là R;
- Nếu $b < -1 \Rightarrow (d) \Leftrightarrow x \ge \dfrac{2+b}{b+1}$

  $\Rightarrow$ (4) có tập nghiệm là: $[\dfrac{2+b}{b+1}; +\infty)$;

- Nếu $b > -1 \Rightarrow (d) \Leftrightarrow x \le \dfrac{2+b}{b+1}$

  $\Rightarrow$ (4) có tập nghiệm là: $(-\infty; \dfrac{2+b}{b+1}]$.

Bài 5. Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} \dfrac{5x+2}{3} \ge 4 - x \\ \dfrac{6-5x}{13} < 3x - 1 \end{cases}$ (1); **b)** $\begin{cases} (1-x)^2 \ge 5 + 3x + x^2 \\ (x+2)^3 < x^3 + 6x^2 - 7x - 5 \end{cases}$ (2).

c) $\begin{cases} \dfrac{4x-5}{7} < x + 3 \\ \dfrac{3x+8}{4} > 2x - 5 \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x - 1 \le 2x - 3 \\ 3x < x + 5 \\ \dfrac{5-3x}{2} \le x - 3 \end{cases}$

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 2 \ge 12 - 3x \\ 6 - 5x < 39x - 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x \ge 10 \\ 44x > 19 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{5}{4} \\ x > \dfrac{19}{44} \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \dfrac{5}{4}$.

Tập nghiệm của hệ là: $[\dfrac{5}{4}; +\infty)$.

b) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x + x^2 > 5 + 3x + x^2 \\ x^3 + 8 + 6x^2 + 12x < x^3 + 6x^2 - 7x - 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x < -4 \\ 19x < -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{4}{5} \\ x < -\frac{13}{19} \end{cases} \Leftrightarrow x < -\frac{4}{5}$$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của hệ (2) là: $(-\infty; -\frac{4}{5})$.

c) Tập nghiệm là $T = \left(-\frac{26}{3}; \frac{28}{5}\right)$;

d) Tập nghiệm là: $T = \left[\frac{11}{5}; \frac{5}{2}\right]$.

Bài 6. Tìm các giá trị của m để mỗi hệ bất phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} 3x - 2 > -4x + 5 \\ 3x + m + 2 < 0 \end{cases}$ (1); b) $\begin{cases} x - 2 \le 0 \\ m + x > 1 \end{cases}$ (2).

Giải

a) Ta có: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -\frac{m+2}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ (1) có nghiệm khi và chỉ khi $1 < -\frac{m+2}{3} \Leftrightarrow m < -5$.

b) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 - m \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ (2) có nghiệm khi và chỉ khi: $1 - m < 2 \Leftrightarrow m > -1$.

Bài 7. Tìm các giá trị của m để mỗi hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $\begin{cases} 2x + 7 < 8x - 1 \\ -2x + m + 5 \ge 0 \end{cases}$ (1); b) $\begin{cases} (x-3)^2 > x^2 + 7x + 1 \\ 2m - 5x \le 8 \end{cases}$ (2).

Giải

a) (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ x \le \frac{m+5}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow$ (1) có nghiệm

$\Leftrightarrow \frac{m+5}{2} > \frac{4}{3} \Leftrightarrow m > -\frac{7}{3}$. Vậy (1) vô nghiệm khi $m \le -\frac{7}{3}$

b) (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x + 9 > x^2 + 7x + 1 \\ 5x \ge 2m - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13x < 8 \\ x \ge \frac{2m-8}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{8}{13} \\ x \ge \frac{2m-8}{5} \end{cases}$

$\Rightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{2m-8}{5} < \frac{8}{13} \Leftrightarrow 26m - 104 < 40$

$\Leftrightarrow 26m < 144 \Leftrightarrow m < \frac{72}{13}$. Vậy hệ (2) vô nghiệm khi $m \ge \frac{72}{13}$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 8. Giải các bất phương trình:

a) $(x + 2)\sqrt{x - 3}\sqrt{x + 5} \le 0$; b) $(x + 4)\sqrt{-x^2 + 1} > 0$.

Bài 9. Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} (2x - 3)\sqrt{x - 1}.\sqrt{1 - x} \le 0 \\ \dfrac{x + 2}{2} + \dfrac{x - 2}{3} + \dfrac{x - 1}{4} \le 3 + \dfrac{x}{2} \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \sqrt{2x - 1} - \sqrt{x + 3} > 0 \\ \sqrt{(x + 1)^2(x + 3)} \ge 0 \end{cases}$.

Bài 10. Giải và biện luận bất phương trình theo a, b, c:

$$\frac{x - ab}{a + b} + \frac{x - ac}{a + c} + \frac{x - bc}{b + c} \le a + b + c$$

Với $(a + b)(b + c)(a + c) \ne 0$.

Bài 11. Tìm m để hệ có nghiệm: $\begin{cases} mx + 9 < 3x + m^2 \\ 4x + 1 < -x + 6 \end{cases}$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 8. a) Tập nghiệm $T = \{3\}$.

b) Tập nghiệm $T = (-1; 1)$.

Bài 9. a) Tập nghiệm $T = \{1\}$.

b) Tập nghiệm $T = (4; +\infty)$.

Bài 10. Đưa bất phương trình về dạng tương đương:

$$x\left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a}\right) \le (ab + bc + ca)\left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a}\right).$$

- Nếu $s = \dfrac{1}{a + b} + \dfrac{1}{b + c} + \dfrac{1}{c + a} > 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty; ab + bc + ca]$.
- Nếu $s < 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $[ab + bc + ca; +\infty)$
- Nếu $s = 0$ thì tập nghiệm là R.

Bài 11. Tìm điều kiện để hệ vô nghiệm ta có $-2 \le m \le 3$. Từ đây suy ra điều kiện để hệ có nghiệm là: $m < -2$ hoặc $m > 3$.

§4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Nhị thức bậc nhất (một biến) là biểu thức dạng $ax + b$ với a và b là các hằng số và $a \ne 0$. Số $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ là nghiệm của nhị thức bậc nhất.

2. Cho phương trình bậc nhất $ax + b = 0$; $x_0 = -\frac{b}{a}$ là nghiệm của nó, x_0 cũng được gọi là nghiệm của nhị thức bậc nhất $ax + b$. Khi đó, ta có:
Nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ cùng dấu với hệ số a khi x lớn hơn x_0, ngược dấu với hệ số a khi x nhỏ hơn x_0.
Ta có bảng tóm tắt về dấu của nhị thức bậc nhất:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x) = ax + b$	Trái dấu với hệ số a	0	Cùng dấu với hệ số a

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Lập bảng xét dấu các biểu thức:

a) $\frac{4 - 3x}{2x + 1}$;

b) $1 - \frac{2 - x}{3x - 2}$;

c) $x(x - 2)^2(3 - x)$;

d) $\frac{x(x - 3)^2}{(x - 5)(1 - x)}$.

Hướng dẫn

a) Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$4 - 3x$		+		+	0	−	
$2x + 1$		−	0	+		+	
$\frac{4 - 3x}{2x + 1}$		−	‖	+	0	−	

b) $1 - \frac{2 - x}{3x - 2} = \frac{4x - 4}{3x - 2}$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$4x - 4$		−		−	0	+	
$3x - 2$		−	0	+		+	
$\frac{4x - 4}{3x - 2}$		+	‖	−	0	+	

c) Chú ý rằng: $(ax + b)^{2n} \geq 0\ \forall x \in R, n \in N^*$. Ta có bảng xét dấu:

X	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
x		−		+		+		+	
$(x - 2)^2$		+		+	0	+		+	
$3 - x$		+		+		+	0	−	
$x(x - 2)^2(3 - x)$		−	0	+	0	+	0	−	

d) Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		0		1		3		5		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\dfrac{x(x-3)^2}{(x-5)(1-x)}$		$+$		$-$	‖	$+$		$+$	‖	$-$	

Bài 2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử bậc nhất rồi xét dấu.

a) $-x^2 + x + 6$; **b)** $2x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $-x^2 + x + 6 = (x - 3)(-x - 2)$. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) Ta có: $2x^2 - (2 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 2x(x - 1) - \sqrt{3}(x - 1)$

$= (x - 1)(2x - \sqrt{3}) = f(x)$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bài 3. Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{(3 - x)(x - 2)}{x + 1} \le 0$; **b)** $\dfrac{3}{1 - x} \ge \dfrac{5}{2x + 1}$;

c) $|2x - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - x| > 3x - 2$; **d)** $|(\sqrt{2} - \sqrt{3})x + 1| \le \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Đáp số:

a) Lập bảng xét dấu vế trái, sau đó dựa vào chiều bất phương trình ta được tập nghiệm $T = (-1; 2] \cup [3; +\infty)$.

b) Đưa bất phương trình về dạng tương đương: $\dfrac{11x - 2}{(1 - x)(2x + 1)} \ge 0$.

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình này, từ đó suy ra được tập nghiệm T của bất phương trình là:

$$T = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{11}; 1\right).$$

c) Đáp số: $T = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$

d) Đáp số: $T = [-5 - 2\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}; 5 + 2\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2}]$ là tập nghiệm.

Bài 4. Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} (x-3)(\sqrt{2}-x) > 0 \\ \dfrac{4x-3}{2} < x+3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{2}{2x-1} \le \dfrac{1}{3-x} \\ |x| < 1 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Tập nghiệm của bất phương trình đầu trong hệ là: $T_1 = (\sqrt{2}; 3)$.

$\frac{4x-3}{2} < x+3 \Leftrightarrow x < \frac{9}{2}$ hay tập nghiệm của bất phương trình thứ hai trong hệ là: $T_2 = \left(-\infty; \frac{9}{2}\right)$.

Từ đó suy ra tập nghiệm của hệ là $T = (\sqrt{2}; 3)$.

b) Ta có: $\frac{2}{2x-1} \le \frac{1}{3-x} \Leftrightarrow \frac{-4x+7}{(2x-1)(3-x)} \le 0$

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình trên từ đó suy ra tập nghiệm là $T_1 = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{4}; 3\right)$.

$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

Từ đó suy ra tập nghiệm của hệ là $T = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$.

LUYỆN TẬP

Bài 4. Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $mx + 4 > 2x + m^2$; **b)** $2mx + 1 \ge x + 4m^2$;

c) $x(m^2 - 1) < m^4 - 1$; **d)** $2(m+1)x \le (m+1)^2(x-1)$.

Hướng dẫn

a) $mx + 4 > 2x + m^2 \Leftrightarrow (m-2)x > m^2 - 4$ (1).

- Nếu $m = 2$, bất phương trình trở thành $0x > 0$ nên vô nghiệm.
- Nếu $m > 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x > m + 2$ hay tập nghiệm là $T = (m+2; +\infty)$.
- Nếu $m < 2$ thì (1) $\Leftrightarrow x < m + 2$ hay tập nghiệm là $T = (-\infty; m+2)$.

b) $2mx + 1 \ge x + 4m^2 \Leftrightarrow x(2m-1) \ge (2m-1)(2m+1)$ (2)

- Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì bất phương trình trở thành: $0x \ge 0$ nên nó tập nghiệm là R.

- Nếu $m > \frac{1}{2}$ thì (2) $\Leftrightarrow$ $x \geq 2m + 1$ hay tập nghiệm của nó là $[2m + 1; +\infty)$.
- Nếu $m < \frac{1}{2}$ thì (2) $\Leftrightarrow$ $x \leq 2m + 1$ hay tập nghiệm của nó là $(-\infty; 2m + 1]$.

c) • Nếu $m = 1$ hoặc $m = -1$, bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $-1 < m < 1$ thì bất phương trình tương đương với: $x > m^2 + 1$, tức là tập nghiệm của nó là: $(m^2 + 1; +\infty)$.
- Nếu $m < -1$ hoặc $m > 1$ thì bất phương trình tương đương với: $x < m^2 + 1$, tức là tập nghiệm của nó là: $(-\infty; m^2 + 1)$.

d) Viết bất phương trình đã cho dưới dạng tương đương:
$x(m + 1)(m - 1) \geq (m + 1)^2$.
- Nếu $m = -1$, bất phương trình có tập nghiệm là R.
- Nếu $m = 1$, bất phương trình vô nghiệm.
- Nếu $-1 < m < 1$, bất phương trình có dạng: $x \leq \frac{m + 1}{m - 1}$, tức là tập nghiệm của bất phương trình là: $(-\infty; \frac{m + 1}{m - 1}]$.
- Nếu $m < -1$ hoặc $m > 1$, bất phương trình có dạng: $x \geq \frac{m + 1}{m - 1}$, tức là tập nghiệm của bất phương trình là: $[\frac{m + 1}{m - 1}; +\infty)$.

Bài 5. Giải các bất phương trình:

a) $(-\sqrt{3}x + 2)(x + 1)(4x - 5) > 0$;

b) $\frac{3 - 2x}{(3x - 1)(x - 4)} < 0$;

c) $\frac{-3x + 1}{2x + 1} \leq -2$;

d) $\frac{x + 2}{3x + 1} \leq \frac{x - 2}{2x - 1}$.

Hướng dẫn

a) Lập bảng xét dấu vế trái, dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm là:
$T = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{5}{4}\right)$.

b) Tập nghiệm là: $T = \left(\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.

c) Đưa bất phương trình về dạng tương đương: $\frac{x + 3}{2x + 1} \leq 0$. Lập bảng xét dấu từ đó ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $T = [-3; -\frac{1}{2})$.

d) $\frac{x + 2}{3x + 1} \leq \frac{x - 2}{2x - 1} \Leftrightarrow \frac{x(x - 8)}{(3x + 1)(2x - 1)} \geq 0$. Lập bảng xét dấu vế trái từ đó ta có tập nghiệm của bất phương trình là:

$$T = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup [8; +\infty).$$

Bài 6. Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $(2x - \sqrt{2})(x - m) > 0$; **b)** $\dfrac{\sqrt{3} - x}{x - 2m + 1} \le 0$.

Hướng dẫn

a) $(2x - \sqrt{2})(x - m) > 0 \Leftrightarrow \left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(x - m) > 0.$

- Nếu $m < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, thì lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình, từ đó ta có tập nghiệm là $T = (-\infty; m) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$.
- Nếu $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì tập nghiệm: $T = R \setminus \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
- Nếu $m > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ thì lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình, từ đó ta suy ra tập nghiệm là: $T = \left(-\infty; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (m; +\infty)$.

b) Tương tự cách làm câu a) ta có các kết quả sau của sự biện luận:

- $m < \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$, tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (-\infty; 2m - 1) \cup [\sqrt{3}; +\infty)$.
- $m = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$, tập nghiệm của bất phương trình là: $T = R \setminus \{\sqrt{3}\}$.
- $m > \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$, tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (-\infty; \sqrt{3}] \cup (2m - 1; +\infty)$.

Bài 7. Tìm nghiệm nguyên của mỗi hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 6x + \dfrac{5}{7} > 4x + 7 \\ \dfrac{8x + 3}{2} < 2x + 25 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 15x - 2 > 2x + \dfrac{1}{3} \\ 2(x - 4) < \dfrac{3x - 14}{2} \end{cases}$.

Hướng dẫn

a) Giải hệ ta có tập nghiệm là $T = \left(\dfrac{22}{7}; \dfrac{47}{4}\right)$. Từ đó hệ có các nghiệm nguyên là: 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11.

b) Hệ có một nghiệm nguyên $x = 1$.

Bài 8. Giải các phương trình và bất phương trình:

a) $|x + 1| + |x - 1| = 4$; b) $\dfrac{|2x - 1|}{(x + 1)(x - 2)} > \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn

a) Lập bảng bỏ dấu giá tri tuyệt đối ở vế trái:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$\|x + 1\|$	$-x - 1$		0	$x + 1$		$x + 1$	
$\|x - 1\|$	$-x + 1$			$-x + 1$	0	$x - 1$	
Vế trái	$-2x$			2		$2x$	

Từ bảng xét dấu ta có:

- Với $x < -1$, ta thu được phương trình: $-2x = 4 \Leftrightarrow x = -2$, giá trị này thỏa mãn điều kiện $x < -1$.
- Với $-1 \le x < 1$, ta thu được phương trình $2 = 4 \Rightarrow$ phương trình đã cho không có nghiệm trên khoảng này.
- Với $x \ge 1$, ta thu được phương trình $2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$, giá trị này thỏa mãn $x \ge 1$. Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = -2$; $x_2 = 2$.

b) • Nếu $x \le \dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình đã cho trở thành.

$$\frac{-2x + 1}{(x + 1)(x - 2)} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x - 1)(x + 4)}{2(x + 1)(x - 2)} < 0$$

Lập bảng xét dấu vế trái trên nửa khoảng $(-\infty; \dfrac{1}{2}]$, từ đó ta có tập nghiệm của bất phương trình trên $(-\infty; \dfrac{1}{2})$ là $(-4; -1)$.

- Nếu $x > \dfrac{1}{2}$ thì bất phương trình trở thành: $\dfrac{2x - 1}{(x + 1)(x - 2)} > \dfrac{1}{2}$. Chuyển vế và thực hiện quy đồng mẫu thức ta thu được bất phương trình tương đương: $\dfrac{x(x - 5)}{2(x + 1)(x - 2)} < 0$.

Lập bảng xét dấu vế trái trên nửa khoảng $(\dfrac{1}{2}; +\infty)$ ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình trên $(\dfrac{1}{2}; +\infty)$ là $(2; 5)$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$T = (-4; -1) \cup (2; 5).$$

Bài 9. Giải và biện luận các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} (x - \sqrt{5})(\sqrt{7} - 2x) > 0 \\ x - m \le 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x - 1} < \dfrac{5}{2x - 1} \\ x - m \ge 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn

a) Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình $(x - \sqrt{5})(\sqrt{7} - 2x) > 0$ ta suy ra tập nghiệm là: $T_1 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}; \sqrt{5}\right)$.

Từ đó ta suy ra:

- Nếu $m \le \frac{\sqrt{7}}{2}$ thì hệ vô nghiệm;
- Nếu $m \in (\frac{\sqrt{7}}{2}; \sqrt{5})$ thì tập nghiệm của hệ là $T = (\frac{\sqrt{7}}{2}; m]$;
- Nếu $m \ge \sqrt{5}$ thì tập nghiệm của hệ là: $(\frac{\sqrt{7}}{2}; \sqrt{5})$.

b) Ta có: $\frac{2}{x-1} < \frac{5}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1$ hoặc $x > 3$.

Như vậy tập nghiệm của bất phương trình đầu là:

$$T_1 = (\frac{1}{2}; 1) \cup (3; +\infty).$$

Dễ dàng có tập nghiệm của bất phương trình $x - m \ge 0$ là $T_2 = [m; +\infty)$.
Do đó:

- Nếu $m \le \frac{1}{2}$ thì tập nghiệm của hệ là: $T = (\frac{1}{2}; 1) \cup (3; +\infty)$;
- Nếu $\frac{1}{2} < m < 1$ thì tập nghiệm $T = [m; 1) \cup (3; +\infty)$;
- Nếu $m \ge 1$ và $m \le 3$ thì tập nghiệm $T = (3; +\infty)$;
- Nếu $m > 3$ thì tập nghiệm $T = [m; +\infty)$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 10. Giải các bất phương trình.

a) $-x^3 + 7x - 6 \le 0$; b) $x^3 + x^2 - 5x + 3 > 0$.

Bài 11. Xét dấu các biểu thức:

a) $\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x}$; b) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 8x - 9}$.

Bài 12*. Giải hệ: $\begin{cases} 8x^3 - 12x^2 + 6x - 3 \ge 0 \\ ||x| - 1| \le 1 \end{cases}$

Bài 13*. Giải bất phương trình: $|x - 1| - 3|2x - 1| \le x - 3$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 10.

a) Ta có: $-x^3 + 7x - 6 \le 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 3)(x - 2) \ge 0$ (1)

Tập nghiệm của bất phương trình là: $[-3; 1] \cup [2; +\infty)$.

b) $x^3 + x^2 - 5x + 3 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 3) > 0$

$\Leftrightarrow x > -3$ và $x \ne 1$.

Bài 11.

a) Ta có: $\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} = \frac{2x}{(3-x)(3+x)}$. Lập bảng xét dấu biểu thức này ta có được:

$$\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} > 0 \Leftrightarrow x < -3 \text{ hoặc } 0 < x < 3.$$

$$\frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 0 \text{ hoặc } x > 3.$$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 8x - 9} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+9)}$. Từ đây ta có:

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -9$ hoặc $x > 3$.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow -9 < x < 3$ và $x \neq 1$.

Bài 12. Tập nghiệm của hệ là: $T = \left[\frac{1+\sqrt[3]{2}}{2}; 2\right]$.

Bài 13*. Tập nghiệm là: $T = \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

§5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn (x và y) là bất phương trình có một trong các dạng: $ax + by + c < 0$; $ax + by + c > 0$; $ax + by + c \leq 0$; $ax + by + c \geq 0$, trong đó a, b và c là các số cho trước sao cho $a^2 + b^2 \neq 0$.
2. Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0 + by_0 + c < 0$ là một bất đẳng thức đúng là một nghiệm của bất phương trình $ax + by + c < 0$.
3. Gọi (d) là đường thẳng có phương trình $ax + by + c = 0$, ta có:
   Nếu $(x_0; y_0)$ là một nghiệm của bất phương trình $ax + by + c > 0$ (hay $ax + by + c < 0$) thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm $(x_0; y_0)$ chính là miền nghiệm của bất phương trình ấy.
4. Hệ gồm nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn được gọi là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình hai ẩn:

a) $(x - 2) + 2(y - 1) > 2x + 4$;

b) $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 \leq 0$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $(x - 2) + 2(y - 1) > 2x + 4$

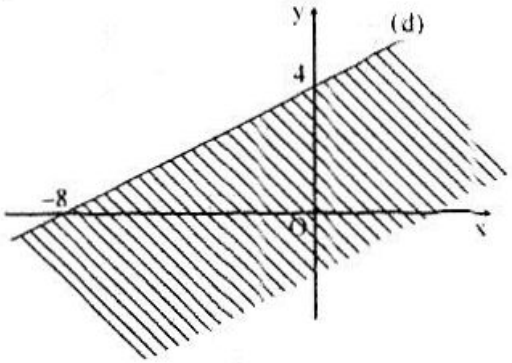
$\Leftrightarrow \quad -x + 2y - 8 > 0$

Ta vẽ đường thẳng $-x + 2y - 8 = 0$.

Ta thấy: $f(0; 0) = -8 < 0$

$(f(x; y) = -x + 2y - 8)$.

Vậy, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa gốc tọa độ.



(Miền nghiệm là miền mặt phẳng tọa độ không bị gạch chéo, không kể bờ (d)).

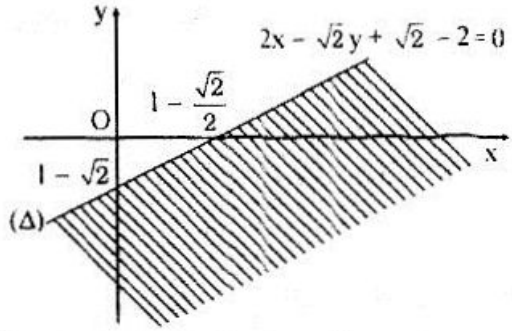
b) Ta vẽ đường thẳng (Δ): $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 = 0$.

Đặt $f(x; y) = 2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2$.

Ta thấy $f(0; 0) = \sqrt{2} - 2 < 0$.

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (kể cả bờ là (Δ)) chứa gốc tọa độ O(0; 0).

(Miền nghiệm là phần mặt phẳng tọa độ không bị gạch, kể cả bờ (Δ)).



Bài 2. Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình hai ẩn:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 > 0 \\ 2(x - 1) + \dfrac{y}{2} < 4 \end{cases}$

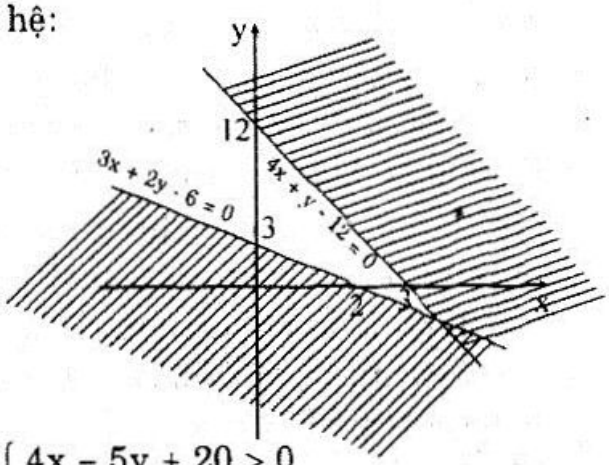
b) $\begin{cases} 4x - 5y + 20 > 0 \\ y > 0 \\ -y + 5 > \dfrac{x - 3}{3} \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Ta có hệ đã cho tương đương với hệ:

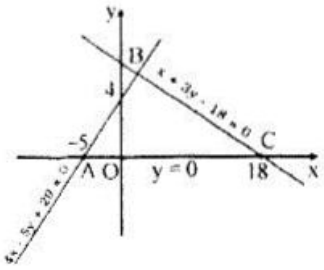
$\begin{cases} 3x + 2y - 6 > 0 \\ 4x + y - 12 < 0 \end{cases}$

Sau khi vẽ hai đường thẳng $3x + 2y - 6 = 0$ và $4x + y - 12 = 0$. Ta suy ra miền nghiệm của hệ là phần mặt phẳng tọa độ không bị gạch chéo, không kể bờ là hai đường thẳng nói trên.



b) Hệ đã cho tương đương với hệ: $\begin{cases} 4x - 5y + 20 > 0 \\ y > 0 \\ x + 3y - 18 < 0 \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ trên là miền trong của tam giác ABC (không kể các cạnh của tam giác).



Bài 3. Một gia đình cần ít nhất 900g chất prôtêin và 400g chất lipit trong thức ăn mỗi ngày. Biết rằng thịt bò chứa 80% prôtêin và 20% lipit. Thịt lợn chứa 60% prôtêin và 40% lipit. Biết rằng khi gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1600g thịt bò, 1100g thịt lợn, giá tiền 1kg thịt bò là 45000đ, 1kg thịt lợn là 35000đ. Giả sử gia đình mua x (kilôgam) thịt bò và y (kilôgam) thịt lợn.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi biểu diễn hình học miền nghiệm (S) của hệ đó.

b) Gọi T (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x (kilôgam) thịt bò và y (kilôgam) thịt lợn. Hãy biểu diễn T theo x, y.

c) Ở câu a) ta thấy (S) là một miền đa giác lồi. Biết rằng T có giá trị nhỏ nhất tại $(x_0; y_0)$, với $(x_0; y_0)$ là tọa độ một trong các đỉnh của (S). Hỏi gia đình đó phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí ít nhất?

Hướng dẫn

a) Giả sử gia đình đó mua x (kg) thịt bò và y (kg) thịt lợn.

Theo giả thiết, x và y cần thỏa mãn điều kiện:

$$0 \le x \le 1,6; \quad 0 \le y \le 1,1.$$

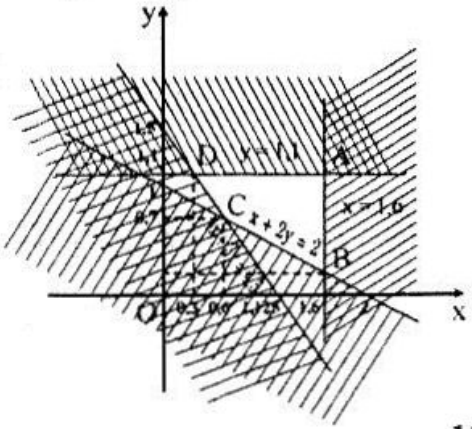
Khi đó lượng prôtêin có được là 80%x + 60%y và lượng lipit có được là 20%x + 40%y. Vì gia đình đó cần ít nhất 0,9kg hay (900g) chất prôtêin và 0,4kg chất lipit trong thức ăn mỗi ngày nên điều kiện tương ứng là: $80\%x + 60\%y \ge 0,9$ và $20\%x + 40\%y \ge 0,4$

hay $4x + 3y \ge 4,5$ và $x + 2y \ge 2$

Vậy hệ điều kiện mà x, y cần thỏa mãn là:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1,6 \\ 0 \le y \le 1,1 \\ 4x + 3y \ge 4,5 \\ x + 2y \ge 2 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ trên là miền trong của tứ giác lồi ABCD kể cả biên (được mô tả ở hình bên).



b) Chi phí để mua x (kg) thịt bò và y (kg) thịt lợn là:

T = 45x + 35y (nghìn đồng)

c) Ta cần tìm x, y sao cho T là nhỏ nhất. Ta đã biết T đạt nhỏ nhất tại

một trong các đỉnh của tứ giác ABCD.

Ta có: A(1,6; 1,1), B(1,6; 0,2), C(0,6; 0,7), D(0,3; 1).

Kiểm tra được tại x = 0,6; y = 0,7 thì T = 51,5 (nghìn đồng) là nhỏ nhất.

Vậy, gia đình đó mua 0,6kg thịt bò và 0,7kg thịt lợn thì chi phí là ít nhất. Cụ thể là phải chi phí 51,5 nghìn đồng.

LUYỆN TẬP

Bài 4. Xác định miền nghiệm của các bất phương trình:

a) $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$; b) $(1 + \sqrt{3})x - (1 - \sqrt{3})y \geq 2$.

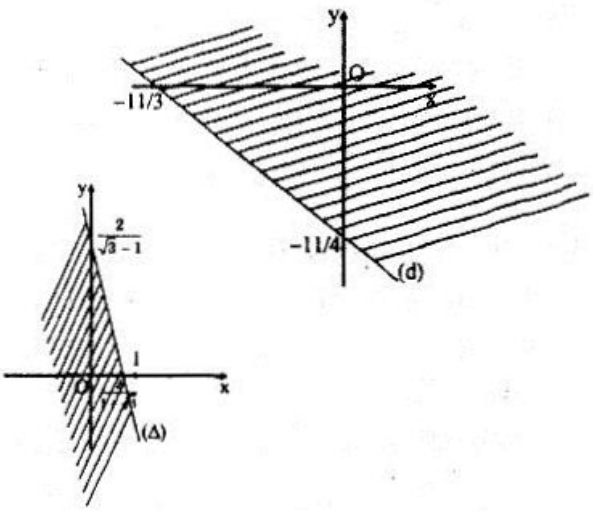
Hướng dẫn

a) Viết bất phương trình về dạng tương đương:

$3x + 4y + 11 < 0$

Từ đó suy ra miền nghiệm là phần mặt phẳng không bị gạch chéo, không kể bờ (d).

b) Miền nghiệm là phần mặt phẳng không bị gạch chéo kể cả bờ (Δ).

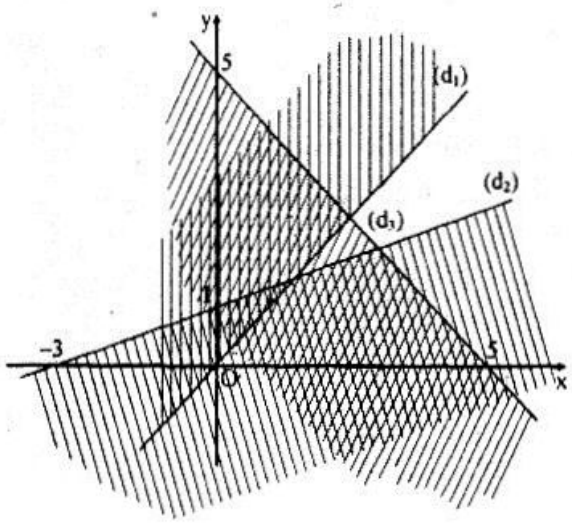


Bài 5. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình hai ẩn.

a) $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y \leq -3 \\ x + y > 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y - 6 \geq 0 \\ 2(x - 1) + \dfrac{3y}{2} \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Hướng dẫn

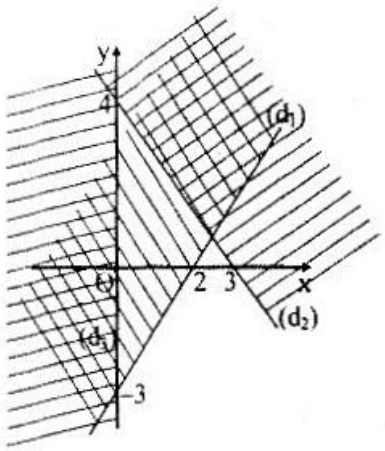
a) Miền nghiệm là phần mặt phẳng không bị gạch chéo trong đó kể cả những điểm thuộc (d_2) và không kể các điểm trên (d_1) và (d_3).



b) Đưa hệ về dạng tương đương:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 6 \geq 0 \\ 4x + 3y - 12 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm là phần mặt phẳng không bị gạch chéo kể cả biên.



Bài 6. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ có tọa độ thỏa mãn hệ các bất phương trình hai ẩn:

$$\begin{cases} 2x - y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ x + y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Trong (S) hãy tìm điểm có tọa độ (x; y) làm cho biểu thức f(x; y) = y − x có giá trị nhỏ nhất, biết rằng f(x; y) có giá trị nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của (S).

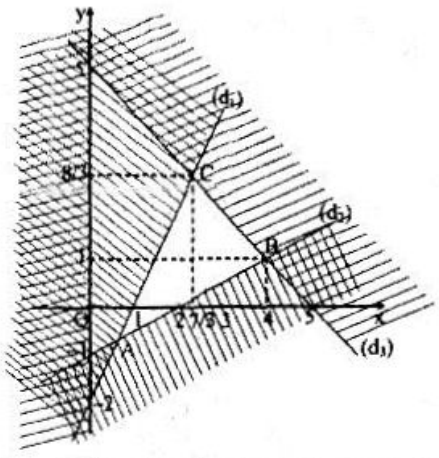
Hướng dẫn

Miền nghiệm của hệ (*) là tam giác ABC và miền trong của nó.

A là giao điểm của (d_1) và (d_2), ta tìm được $A\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

B là giao điểm của (d_2) và (d_3), ta tìm được B(4; 1).

C là giao điểm của (d_1) và (d_3), ta tìm được $C\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$.



Ta có: $f(A) = f\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}$;

$f(B) = f(4; 1) = -3$.

$f(C) = f\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

Từ trên ta có giá trị nhỏ nhất của f(x; y) là −3 và đạt được tại điểm B.

Bài 7. Bài toán vitamin

Một nhà khoa học nghiên cứu về tác động phối hợp của vitamin A và vitamin B đối với cơ thể con người. Kết quả như sau:

i) Một người có thể tiếp nhận được mỗi ngày không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B.

ii) Một người mỗi ngày cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B.

iii) Do tác động phối hợp của hai loại vitamin, mỗi ngày, số đơn vị vitamin B phải nhiều hơn $\frac{1}{2}$ số đơn vị vitamin A nhưng không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A.

Giả sử x và y lần lượt là số đơn vị vitamin A và B mà bạn dùng mỗi ngày.

a) Gọi c là số tiền vitamin mà bạn phải trả (tính bằng đồng). Hãy viết phương trình biểu diễn c dưới dạng một biểu thức của x và y, nếu giá một đơn vị vitamin A là 9 đồng và giá một đơn vị vitamin B là 7,5 đồng.

b) Viết các bất phương trình biểu thị i), ii) và iii), lập thành một hệ bất phương trình rồi biểu diễn miền nghiệm của một hệ bất phương trình đó.

c) Cũng trên mặt phẳng tọa độ ấy, hãy vẽ các đường biểu diễn số tiền phải trả c, nếu: $c = 9000$; $c = 4500$; $c = 2250$.

Hãy dùng bút màu để phân biệt các đường đó.

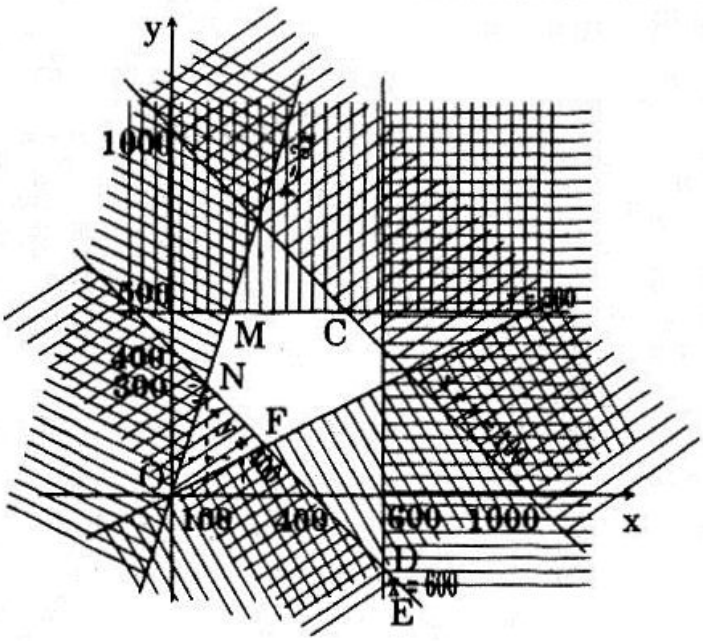
d) Tìm phương án dùng hai loại vitamin A và B thỏa mãn các điều kiện trên để số tiền phải trả là ít nhất.

Hướng dẫn

a) Từ giả thiết ta biểu diễn c được dưới dạng: $c = 9x + 7{,}5y$.

b) Từ các điều kiện i), ii) và iii), ta được:
$$\begin{cases} 0 \le x \le 600 \\ 0 \le y \le 500 \\ 400 \le x + y \le 1000 \\ \frac{1}{2}x < y \le 3x \end{cases}$$

c) Ta biểu diễn miền nghiệm trên mặt phẳng tọa độ.



Miền nghiệm là ngũ giác MCDEFN và miền trong của nó trừ cạnh EF.

d) Phương án tốt nhất là dùng 100 đơn vị vitamin A và 300 đơn vị vitamin B mỗi ngày. Chi phí mỗi ngày là 3150 đồng.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 8. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} y + |x| \le 0 \\ y - \frac{1}{2}x + 2 \ge 0 \end{cases}$ (I)

a) Xét xem các cặp số sau, cặp nào là một nghiệm của (I).

$(1; 7)$, $(2; -4)$, $(-1; -\frac{3}{2})$, $(-m^2 - 1; -\frac{1}{2})$ với $m \in R$.

b) Xác định miền nghiệm của (I).

c*) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của (I).

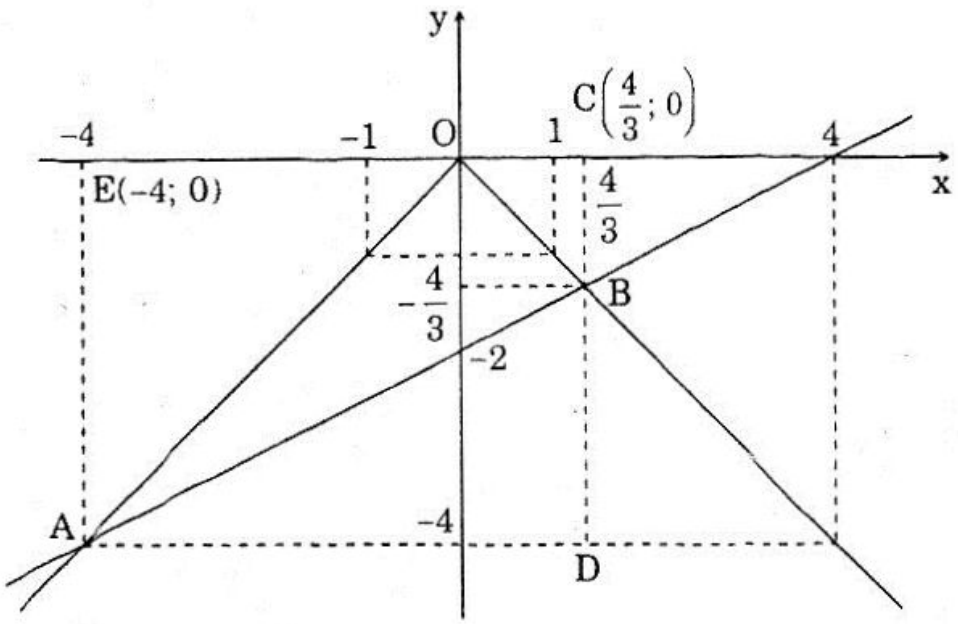
d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x; y) = \frac{1}{2}x + y$ với x, y thỏa mãn (I).

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 8.

a) Chỉ có $\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ trong các cặp đã cho là một nghiệm của (I).

b)



Miền nghiệm của (I) là miền trong của ΔAOB (kể cả các cạnh).

c*) Các nghiệm nguyên của (I) là:

$(-4; -4)$, $(-3; -3)$, $(-2; -2)$, $(-2; -3)$, $(-1; -2)$, $(-1; -1)$, $(0; -2)$, $(0; -1)$, $(0; 0)$, $(1; -1)$.

d) Thay tọa độ các đỉnh ΔAOB vào $F(x; y)$ ta được:

$\min F(x; y) = F(-4; -4) = -6$.

§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Tam thức bậc hai (một biến) là biểu thức dạng $ax^2 + bx + c$ trong đó a, b, c là các số thực và $a \neq 0$.

Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, cũng được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2. Định lí về dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi giá trị của x.

Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) có hai nghiệm x_1 và x_2 và giả sử $x_1 < x_2$. Khi đó f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi x ở ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ và f(x) trái dấu với hệ số a với mọi x ở trong khoảng $(x_1; x_2)$.

Bảng tóm tắt:

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

1) $\Delta < 0$, $\forall x \in R$, $af(x) > 0$.

2) $\Delta = 0$, $\forall x \neq -\dfrac{b}{2a}$, $af(x) > 0$.

3) $\Delta > 0$, $\forall x \in (x_1; x_2)$, $af(x) < 0$.

$\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, $af(x) > 0$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Xét dấu các tam thức bậc hai:

a) $3x^2 - 2x + 1$;

b) $-x^2 + 4x - 1$;

c) $x^2 - \sqrt{3}x + \dfrac{3}{4}$;

d) $(1 - \sqrt{2})x^2 - 2x + 1 + \sqrt{2}$.

Hướng dẫn

a) $\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0 \Rightarrow f(x) > 0$ với mọi $x \in R$ (vì $a = 3 > 0$)

b) $\Delta' = 4 - 1 = 3 > 0$, tam thức bậc hai có hai nghiệm $x_1 = 2 - \sqrt{3}$; $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.

Khi đó ta có:

$f(x) > 0$, với mọi $x \in (2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3})$.

$f(x) < 0$, với mọi $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}; +\infty)$.

c) $f(x) = \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \geq 0 \ \forall x$

d) Ta có: $a = 1 - \sqrt{2} < 0$, tam thức bậc hai có hai nghiệm $x_1 = -3 - 2\sqrt{2}$ và $x_2 = 1$, nên: $f(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3 - 2\sqrt{2}) \cup (1; +\infty)$.

$f(x) > 0$ với mọi $x \in (-3 - 2\sqrt{2}; 1)$.

Bài 2. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn dương:

a) $(m^2 + 2)x^2 - 2(m + 1)x + 1$; b) $(m + 2)x^2 + 2(m + 2)x + m + 3$.

Hướng dẫn

a) Tam thức luôn dương khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} a = m^2 + 2 > 0 \ (\forall m) \\ \Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 + 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

b) Trường hợp 1: Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$. Biểu thức trở thành:

$0x^2 + 0x + 1 > 0$ (đúng $\forall x \in R$)

Trường hợp 2: Nếu $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$. Biểu thức dương $\forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(m + 2) < 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2.$$

Bài 3. Tìm các giá trị của m để mỗi biểu thức sau luôn âm.

a) $-x^2 + 2m\sqrt{2}x - 2m^2 - 1$; b) $(m - 2)x^2 - 2(m - 3)x + m - 1$.

Đáp số: a) $\forall m \in R$.

b) Không tồn tại m.

Bài 4. Chứng minh định lí về dấu của tam thức bậc 2.

Hướng dẫn

Ta có: $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ với $\Delta = b^2 - 4ac$.

* Nếu $\Delta < 0$ thì $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ nên $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Vậy $f(x)$ cùng dấu với a $\forall x \in R$.

* Nếu $\Delta = 0$ thì $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Vì $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ nên $f(x)$ cùng dấu với a, $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$. Ngoài ra $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$.

* Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của tam thức. Giả sử $x_1 < x_2$ ta có dấu $(x - x_1)(x - x_2)$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$(x - x_1)(x - x_2)$		+	0	−	0	+	

Vậy f(x) cùng dấu với a khi $x < x_1$ hay $x > x_2$ và f(x) trái dấu với a khi $x_1 < x < x_2$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 5. Xét dấu các biểu thức:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$; b) $g(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - x - 2}$;

c) $h(x) = 9x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; d) $p(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + 8x - 5$.

Bài 6*. a) Cho $f(x) = x^2 + bx + c$. Chứng minh rằng:

Nếu $2b^2 + 4c^2 + 2b + 4bc + 1 < 0$ thì $f(x) > 0\ \forall x$.

b) Cho $g(x) = x^2 + 2x - p^2 + 2p$

Hãy xét dấu g(x) tùy theo các giá trị của tham số p.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 5.

a) Bảng xét dấu f(x):

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		1		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

b) Bảng xét dấu g(x):

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		−1		1		2		$+\infty$
$2x^2 + 3x - 5$		+	0		−		0		+		
$x^2 - x - 2$		+			0		−		0	+	
g(x)		+	0	−	‖	+	0	−	‖	+	

c) $h(x) = (3x + 1)[3x^2 + 1]$, do $3x^2 + 1 > 0\ \forall x$ nên h(x) cùng dấu với $3x + 1$.

d) Biến đổi p(x) thành dạng tích: $p(x) = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 3x - 5)$

Vì $x^2 - x + 1 > 0\ \forall x \Rightarrow$ p(x) cùng dấu với $2x^2 + 3x - 5$ đã xét trong câu a).

Bài 6.

a) $2b^2 + 4c^2 + 2b + 4bc + 1 < 0$

$\Leftrightarrow\quad b^2 - 4c < -(1 + 2c + b)^2$, do $-(1 + 2c + b)^2 \le 0\ \forall b, \forall c$.

Nên từ giả thiết ta suy ra: $b^2 - 4c < 0 \Rightarrow f(x) > 0\ \forall x$.

b) Xét $g(x) = x^2 + 2x - p^2 + 2p$. Biệt số $\Delta' = (p - 1)^2$

Trường hợp 1: Nếu $p = 1$ thì $\Delta' = 0$, khi này $g(x) = (x + 1)^2 \ge 0,\ \forall x$.

Trường hợp 2: Nếu $p \ne 1$ thì $\Delta' > 0$, khi này g(x) có hai nghiệm là: $x_1 = -1 + |p - 1|$; $x_2 = -1 - |p - 1|$.

Bảng xét dấu g(x):

x	$-\infty$		$-1-\lvert p-1\rvert$		$-1+\lvert p-1\rvert$		$+\infty$
g(x)		+	0	−	0	+	

§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Bất phương trình bậc hai (một ẩn) là bất phương trình có một trong các dạng: $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \le 0$; $ax^2 + bx + c \ge 0$ trong đó a, b, c là các số thực, $a \ne 0$ và x là ẩn số.
2. Phương pháp giải
   Vận dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, sau đó chọn nghiệm thích hợp.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Giải các bất phương trình:

a) $-5x^2 + 4x + 12 < 0$; **b)** $16x^2 + 40x + 25 < 0$;

c) $3x^2 - 4x + 4 \ge 0$; **d)** $x^2 - x - 6 \le 0$.

Đáp số:

a) Tập nghiệm $T = \left(-\infty; -\frac{6}{5}\right) \cup (2; +\infty)$.

b) Bất phương trình vô nghiệm vì $\Delta' < 0$ và $a = 16 > 0$.

c) Tập nghiệm là R vì $3x^2 - 4x + 4$ có $\Delta' < 0$ và hệ số $a = 3 > 0$.

d) Tập nghiệm $T = [-2; 3]$.

Bài 2. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{x^2 - 9x + 14}{x^2 - 5x + 4} > 0$; **b)** $\dfrac{-2x^2 + 7x + 7}{x^2 - 3x - 10} \le -1$;

c) $(2x + 1)(x^2 + x - 30) \ge 0$; **d)** $x^4 - 3x^2 \le 0$.

Đáp số:

a) Tập nghiệm $T = (-\infty; 1) \cup (2; 4) \cup (7; +\infty)$.

b) Tập nghiệm $T = (-\infty; -2) \cup (1; 3) \cup (5; +\infty)$.

c) Tập nghiệm $T = \left[-6; \frac{1}{2}\right] \cup (5; +\infty)$.

d) Tập nghiệm $T = [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

Bài 3. Tìm các giá trị của m để mỗi phương trình sau đây có nghiệm.

a) $(m - 5)x^2 - 4mx + m - 2 = 0$; **b)** $(m + 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 3 = 0$.

Giải

a) + Khi $m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 5$ phương trình trở thành:

$$-20x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{20}$$

+ Khi $m - 5 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 5$, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$\Delta' = (-2m)^2 - (m-2)(m-5) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - (m^2 - 5m - 2m + 10) \geq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m^2 + 7m - 10 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 3m^2 + 7m - 10 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -\dfrac{10}{3} \end{array}\right.$

Vậy yêu cầu bài toán thỏa mãn với $m \in \left(-\infty; -\dfrac{10}{3}\right] \cup [1; +\infty)$.

b) Đáp số: $m \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}; \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right]$.

Bài 4. Giải các bất phương trình:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ -x^2 - 3x + 10 \geq 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 > 0 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) • $2x^2 + 9x + 7 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -\dfrac{7}{2}$ hoặc $x > -1$.

• $x^2 + x - 6 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x < 2$.

Suy ra tập nghiệm của hệ là $T = (-1; 2)$.

b) $\begin{cases} 4x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ -4x^2 + 12x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{4} \leq x \leq 2 \\ x < \dfrac{1}{2} \text{ hoặc } x > \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Biểu diễn trên trục số tập nghiệm là: $T = [-\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2})$.

c) Tập nghiệm là: $T = \left[-5; \dfrac{-5-\sqrt{57}}{4}\right] \cup \left[\dfrac{-5+\sqrt{57}}{4}; 2\right]$.

d) Tập nghiệm là: $T = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$.

LUYỆN TẬP

Bài 5. Tìm các giá trị của m để các phương trình sau có nghiệm:

$x^2 + (m-2)x - 2m + 3 = 0$

Hướng dẫn

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$\Delta = (m-2)^2 - 4(3 - 2m) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -2 + \sqrt{12} \\ m < -2 - \sqrt{12} \end{array}\right.$

Bài 6. Chứng minh rằng các phương trình sau vô nghiệm dù m lấy bất kì giá trị nào.

a) $x^2 - 2(m + 1)x + 2m^2 + m + 3 = 0$;

b) $(m^2 + 1)x^2 + 2(m + 2)x + 6 = 0$.

Giải

a) Phương trình đã cho có:

$\Delta' = (m + 1)^2 - (2m^2 + m + 3) = -m^2 + m - 2 < 0 \ \forall m$ (do tam thức $-m^2 + m - 2$ có $\Delta < 0$ và $a = -1 < 0$) $\Rightarrow$ (đpcm).

b) Phương trình đã cho có:

$\Delta' = (m + 2)^2 - 6(m^2 + 1) = -5m^2 + 4m - 2 < 0 \ (\forall m) \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 7. Tìm m để bất phương trình sau:

$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 3(m - 2) > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in R$.

Giải

Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in R$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 > 0 \\ \Delta' = (m + 1)^2 - 3(m - 1)(m - 2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2 + 2m + 1 - 3m^2 + 9m - 6 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -2m^2 + 11m - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m > 5.$$

Bài 8. Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^2 + 5x + 6} \le 0$; b) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 4} < \dfrac{1}{x^2 - 7x + 10}$.

Đáp số: a) Tập nghiệm $T = (-3; -2) \cup [-1; 1]$.

b) Tập nghiệm $T = (1; 2) \cup (3; 4) \cup (5; +\infty)$.

Bài 9. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sqrt{(2x + 5)(1 - 2x)}$; b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 + 3x + 1}}$.

Đáp số: a) $D = \left[-\dfrac{5}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

b) $D = (-\infty; -4) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bài 10. Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 3x + 4 \\ x^2 - 7x + 10 \le 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + 9x - 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 \le 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 3x + 4 \\ x^2 - 7x + 10 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 7 \\ 2 \leq x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$

b) $\begin{cases} 2x^2 + 9x - 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{-9 - \sqrt{137}}{4} \text{ hoặc } x > \dfrac{-9 + \sqrt{137}}{4} \\ -3 \leq x \leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-9 + \sqrt{137}}{4} < x \leq 2.$

c) $\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ (x-1)(3x^2 + 7x + 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 3 \\ -\dfrac{4}{3} \leq x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 \leq x < 3 \text{ hoặc } -\dfrac{4}{3} \leq x \leq -1.$

Bài 11. Tìm các giá trị của a sao cho với mọi x, ta luôn có:

$$-1 \leq \frac{x^2 + 5x + a}{2x^2 - 3x + 2} < 7.$$

Hướng dẫn

Ta có: $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ luôn dương với mọi $x \in R$ nên bất phương trình kép trên tương đương với

$$-2x^2 + 3x - 2 \leq x^2 + 5x + a < 14x^2 - 21x + 14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x + a + 2 \geq 0 \\ 13x^2 - 26x + 14 - a > 0 \end{cases}$$

Hệ này đúng với mọi $x \in R$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta_1' = 1 - 3(a+2) \leq 0 \\ \Delta_2' = 13^2 - 13(14 - a) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leq a < 1.$$

Bài 12. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0 \\ (m+1)x \geq 3 \end{cases}$.

Hướng dẫn

Ta có: $x^2 + 2x - 15 < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 3.$

Ta giải, biện luận bất phương trình $(m+1)x \geq 3$ (*) theo m.

- $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, (*) vô nghiệm.
- $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$, (*) $\Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{m+1}$.

• $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1, (*) \Leftrightarrow x \le \frac{3}{m+1}$.

Ta xét ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m = -1$, (*) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Trường hợp 2: $m > -1$, hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{3}{m+1} < 3 \Leftrightarrow 3 < 3m + 3 \text{ (vì } m + 1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow m > 0 \text{ (thỏa điều kiện } m > -1)$$

Trường hợp 3: $m < -1$, hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{3}{m+1} > -5 \Leftrightarrow 3 < -5m - 5 \text{ (vì } m + 1 < 0)$$

$$\Leftrightarrow -5m > 8 \Leftrightarrow m < -\frac{8}{5} \text{ (thỏa mãn } m < -1)$$

Vậy hệ có nghiệm khi và chỉ khi $m < -\frac{8}{5}$ hoặc $m > 0$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 13. Cho các hàm số biến x:

$$f(x) = 3x^2 - (4m - 3)x + 3 - 2m + m^2 \text{ và } g(x) = -x^2 - x + 2$$

1) Khi $m = 2$. Hãy giải các bất phương trình:

a) $f(x) \le 4$ (1)

b) $\frac{f(x) - 4}{g(x)} > 0$ (2)

c) $f(x) - g(x) \le 0$ (3)

2) Chứng minh rằng: $\forall m$ thì $f(x) \ge g(x)$ $\forall x$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 13. 1) Khi $m = 2$:

a) (1) $\Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 1 \le 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \le x \le \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$.

b) (2) $\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 5x + 1}{-x^2 - x + 2} > 0$ (2')

Vậy (2') $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x < \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \\ 1 < x < \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \end{array}\right.$

c) $x = \frac{1}{2}$

2) Theo bài ra thì bất phương trình $f(x) \ge g(x)$ là:

$$3x^2 - (4m - 3)x + 3 - 2m + m^2 \ge -x^2 - x + 2$$

$\Leftrightarrow$ $4x^2 - 2(2m - 2)x + (m^2 - 2m + 1) \geq 0$ (*) là bất phương trình bậc 2, ẩn số x. Ta có: $\Delta' = 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 8m - 4 = 0\ \forall m \Rightarrow$ $\forall m$ thì (*) nghiệm đúng $\forall x$.

§8. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

I. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình và bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối
Ở thể loại này sau khi loại bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta quy về phương trình hoặc bất phương trình bậc hai.
2. Phương trình và bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn bậc hai
Đối với loại này chúng ta thường dùng phương pháp bình phương hai vế của phương trình hoặc bất phương trình ban đầu kèm với điều kiện của ẩn làm cho hai vế không âm, ta được phương trình hoặc bất phương trình tương đương hoặc dùng phương pháp đặt ẩn phụ quy về phương trình, bất phương trình bậc hai.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $|x^2 - 5x + 4| = x^2 + 6x + 5$; **b)** $|x - 1| = 2x - 1$;

c) $|-x^2 + x - 1| \leq 2x + 5$; **d)** $|x^2 - x| \leq |x^2 - 1|$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $|x^2 - 5x + 4| = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{nếu } \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq 1 \end{array}\right. \\ -(x^2 - 5x + 4) & \text{nếu } 1 < x < 4 \end{cases}$

* Trường hợp 1: Nếu $x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$ thì phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$x^2 - 5x + 4 = x^2 + 6x + 5 \Leftrightarrow 11x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{11} \text{ (thỏa mãn)}$$

* Trường hợp 2: Nếu $x \in (1; 4)$ thì phương trình đã cho

$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 = x^2 + 6x + 5$

$\Leftrightarrow 2x^2 + x + 9 = 0$ (phương trình này vô nghiệm).

Tóm lại tập nghiệm phương trình đã cho $T = \left\{-\frac{1}{11}\right\}$.

b) Đáp số: $x = \frac{2}{3}$.

c) Ta có: $-x^2 + x - 1 = -(x^2 - x + 1) = -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0, \forall x \in R$.

Vậy bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^2 - x + 1 \leq 2x + 5$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 4$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình: $T = [-1; 4]$.

d) Đáp số: Tập nghiệm $T = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

Bài 2. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2 + 4x - 1} = x + 1$;

b) $\sqrt{4x^2 + 101x + 64} = 2(x + 10)$;

c) $\sqrt{x^2 + 2x} = -2x^2 - 4x + 3$;

d) $\sqrt{(x + 1)(x + 2)} = x^2 + 3x - 4$.

Hướng dẫn

a) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 4x - 1 = (x + 1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3} - 1.$$

b) Đáp số: $x = 16$.

c) Đáp số: $x = -1 \pm \sqrt{2}$.

d) Đặt $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$, $y \geq 0$ ta được phương trình:

$$y = y^2 - 6 \Leftrightarrow y^2 - y - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \text{ (loại)} \\ y = 3 \end{array}\right.$$

Với $y = 3$ theo cách đặt ta có:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3 + \sqrt{37}}{2} \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{37}}{2} \end{array}\right.$$

thỏa mãn điều kiện $x^2 + 3x + 2 \geq 0$.

Vậy nghiệm là: $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Bài 3. Giải các bất phương trình:

a) $\sqrt{x^2 + x - 6} < x - 1$;

b) $\sqrt{2x - 1} \leq 2x - 3$;

c) $\sqrt{2x^2 - 1} > 1 - x$;

d) $\sqrt{x^2 - 5x - 14} \geq 2x - 1$.

Hướng dẫn

a) Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 < (x - 1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ -3x > -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -3 \end{array}\right. \\ x \geq 1 \\ x < \dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < \frac{7}{3}.$$

Vậy tập nghiệm: $T = \left[2; \frac{7}{3}\right)$.

b) Đáp số: Tập nghiệm: $T = \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

c) Bất phương trình tương đương:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1 - x < 0 \\ 2x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ 2x^2 - 1 > (1 - x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x < -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x > -1 + \sqrt{3} \\ x < -1 - \sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1 - \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} < x \leq 1 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình: $T = \left(-\infty; -1 - \sqrt{3}\right) \cup \left(-1 + \sqrt{3}; +\infty\right)\Big]$.

d) Đáp số: Tập nghiệm: $T = (-\infty; -2]$.

Bài 4. Tìm tập xác định các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{\left|x^2 + 3x - 4\right| - x + 8}$;

b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{\left|2x - 1\right| - x - 2}}$;

c) $y = \sqrt{\dfrac{1}{x^2 - 7x + 5} - \dfrac{1}{x^2 + 2x + 5}}$;

d) $y = \sqrt{\sqrt{x^2 - 5x - 14} - x + 3}$.

Hướng dẫn

a) Hàm số có nghĩa khi:

$\left|x^2 + 3x - 4\right| - x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \left|x^2 + 3x - 4\right| \geq x - 8.$

Giải bất phương trình ẩn x này ta có tập nghiệm: R.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là R.

b) Hàm số có nghĩa khi:

$\dfrac{x^2 + x + 1}{\left|2x - 1\right| - x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow \left|2x - 1\right| - x - 2 > 0$ (do $x^2 + x + 1 > 0\ \forall x$)

$$\Leftrightarrow \quad |2x-1| > x+2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x < -\dfrac{1}{3} \\ x > 3 \end{array}\right.$$

Vậy tập xác định của hàm số: $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

c) Đáp số: $[0; 1) \cup (5; +\infty)$.

d) Đáp số: $(-\infty; -2] \cup [23; +\infty)$.

LUYỆN TẬP

Bài 5. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $\left|\dfrac{x^2-2}{x+1}\right| = 2;$ b) $\left|\dfrac{3x+4}{x-2}\right| \le 3;$

c) $\left|\dfrac{2x-3}{x-3}\right| \ge 1;$ d) $|2x+3| = |4-3x|.$

Hướng dẫn

a) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\dfrac{x^2-2}{x+1}\right)^2 = 4$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2-2}{x+1} - 2\right)\left(\frac{x^2-2}{x+1} + 2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-2x-4}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x}{x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^2-2x-4=0 \\ x^2+2x=0 \end{array}\right. \\ x+1 \ne 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \pm \sqrt{5} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình: $T = \{0; -2; 1 \pm \sqrt{5}\}$.

b) Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\dfrac{3x+4}{x-2}\right)^2 \le 9$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3x+4}{x-2} - 3\right)\left(\frac{3x+4}{x-2} + 3\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4-3(x-2)}{x-2} \cdot \frac{3x+4+3(x-2)}{x-2} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{x-2} \cdot \frac{6x-2}{x-2} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 6x-2 \le 0 \\ x \ne 2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \le \frac{1}{3}.$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình $T = \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right]$.

c) Đáp số: $T = (-\infty; 0] \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$

d) $x = \dfrac{1}{5}$; $x = 7$.

Bài 6. Giải các bất phương trình sau:

a) $|x^2 - 5x + 4| \le x^2 + 6x + 5$; **b)** $4x^2 + 4x - |2x + 1| \ge 5$.

Đáp số:

a) Tập nghiệm: $\left[-\frac{1}{11}; +\infty\right)$; **b)** Tập nghiệm: $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$.

Bài 7. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{5x^2 - 6x - 4} = 2(x - 1)$; **b)** $\sqrt{x^2 + 3x + 12} = x^2 + 3x$.

Hướng dẫn

a) Tập nghiệm $T = \{2\}$.

b) Dễ thấy $x^2 + 3x + 12 > 0\ \forall x$. Vậy tập xác định phương trình là: R.

Đặt $y = \sqrt{x^2 + 3x + 12} > 0 \Rightarrow x^2 + 3x = y^2 - 12$.

Ta có phương trình:

$$y = y^2 - 12 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3 \text{ (loại)} \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Với $y = 4$ theo cách đặt ta có:

$$\sqrt{x^2 + 3x + 12} = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm $T = \{1; -4\}$.

Bài 8. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 + 6x + 8} \le 2x - 3$; **b)** $\frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 - 3x - 10}} > 1$;

c) $6\sqrt{(x - 2)(x - 32)} \le x^2 - 34x + 48$.

Hướng dẫn

a) Tập nghiệm $T = \left[\frac{9 + \sqrt{78}}{3}; +\infty\right)$.

b) Tập nghiệm $T = (5; +\infty)$.

c) Điều kiện: $(x - 2)(x - 32) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 32 \\ x \le 2 \end{array}\right.$ (*)

Đặt $y = \sqrt{(x - 2)(x - 32)} = \sqrt{x^2 - 34x + 64}$ $(y \ge 0)$

$\Rightarrow x^2 - 34x = y^2 - 64 \Rightarrow x^2 - 34x + 48 = y^2 - 64 + 48$

Vậy ta có bất phương trình sau:

$$6y \le y^2 - 64 + 48 \Leftrightarrow y^2 - 6y - 16 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y \ge 8 \\ y \le -2 \end{array}\right.$$

Kết hợp với $y \ge 0$ ta có $y \ge 8$, theo cách đặt ta có:

$$\sqrt{x^2 - 34x + 64} \geq 8 \Leftrightarrow x^2 - 34x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 34 \\ x \leq 0 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $T = (-\infty; 0] \cup [34; +\infty)$.

Bài 9. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - x - 12} \geq x - 1$; b) $\sqrt{x^2 - 4x - 12} > 2x + 3$;

c) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$.

Đáp số:

a) Tập nghiệm $T = (-\infty; -3] \cup [13; +\infty)$.

b) Tập nghiệm $T = (-\infty; -2]$.

c) Tập nghiệm $T = [-5; -1) \cup (1; +\infty)$.

Bài 10. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình:

$$x^4 + (1 - 2m)x^2 + m^2 - 1 = 0$$

a) Vô nghiệm.

b) Có hai nghiệm phân biệt.

c) Có bốn nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn

Đặt $t = x^2$, $t \geq 0$ ta có phương trình sau:

$$t^2 + (1 - 2m)t + m^2 - 1 = 0 \qquad (1)$$

a) Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm cùng âm hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \Delta \geq 0 \\ S < 0 \\ P < 0 \end{array}\right. \\ \Delta < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} (1-2m)^2 - 4(m^2-1) \geq 0 \\ 2m - 1 < 0 \\ m^2 - 1 < 0 \end{array}\right. \\ (1-2m)^2 - 4(m^2-1) < 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > \dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có một nghiệm âm và một nghiệm dương hoặc (1) có một nghiệm kép dương. Từ đó ta có $-1 < m < 1$ hoặc $m = \dfrac{5}{4}$.

c) Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm dương phân biệt. Từ đó ta có: $1 < m < \dfrac{5}{4}$.

Bài 11. Tìm các giá trị của a sao cho phương trình:

$(a - 1)x^4 - ax^2 + a^2 - 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Đáp số: $a = -1$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 12. Giải các phương trình, bất phương trình:

a) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0 \qquad (1)$

b) $(x - \sqrt{x} + 1)^2 + x - \sqrt{x} - 1 = 0$ (2)

c*) $|3x + 4| + |5 - 3x| \le 8 + 12x - 36x^2$ (3)

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 12. a) Đặt $t = x + \frac{1}{x}$.

Nghiệm của phương trình là: $x = -2 + \sqrt{3}$; $x = -2 - \sqrt{3}$.

b) Đặt $t = x - \sqrt{x} + 1$.

Nghiệm của phương trình là: $x = 0$; $x = 1$.

c) Xét (3).

(3) $\Leftrightarrow$ $|3x + 4| + |5 - 3x| \le 9 - (6x - 1)^2$ (3')

Nhận thấy: $|3x + 4| + |5 - 3x| \ge |3x + 4 + 5 - 3x| = 9$

$\Rightarrow$ nếu (3') có nghiệm thì: $9 - (6x - 1)^2 \ge 9 \Rightarrow (6x - 1)^2 \le 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{6}$ ngược lại $x = \frac{1}{6}$ thỏa mãn (3').

Đáp số: $x = \frac{1}{6}$.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG IV

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức:

* Các tính chất.
* Các bất đẳng thức cơ bản:
  - Bất đẳng thức Cô-si: Cho $a_1, a_2, ..., a_n \ge 0$, ta có:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$

  - Bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki: Cho hai dãy $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n \in R$, ta có:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)_2 \le \left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right).$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} ... = \frac{a_n}{b_n}$

2. Phương trình, bất phương trình bậc nhất một ẩn, hai ẩn.

3. Phương trình, bất phương trình bậc 2 một ẩn, dấu của tam thức bậc hai.

4. Một số phương trình, bất phương trình quy về bậc hai.

* Phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối.

Dạng cơ bản:

a) $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$

b) $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) = g^2(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) = \pm g(x) \end{array}\right.$

c) $|f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) \leq g^2(x) \end{array}\right.$

d) $|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) < 0 \\ \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) \geq g^2(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$

* Phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối. Dạng cơ bản:

a) $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$

b) $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f^2(x) = g^2(x) \end{array}\right.$

c) $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq f(x) \end{array}\right.$

d) $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $|a + b| < |1 + ab|$ với $|a| < 1$, $|b| < 1$.

b) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ với mọi $n \in N^*$.

c) $\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ với mọi $a \geq 0, b \geq 0$.

Hướng dẫn

a) Bất đẳng thức cần chứng minh:

$\Leftrightarrow (a + b)^2 < (1 + ab)^2 \Leftrightarrow a^2 + 2|ab| + b^2 < 1 + 2|ab| + b^2a^2$

$\Leftrightarrow (1 - a^2) + b^2(a^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow (1 - a^2)(1 - b^2) > 0$ (1).

Từ giả thiết ta có: $\left\{\begin{array}{l} 1 - a^2 > 0 \\ 1 - b^2 > 0 \end{array}\right.$ nên $(1 - a^2)(1 - b^2) > 0$

$\Rightarrow$ (1) đúng $\Rightarrow$ (đpcm).

b) $\forall n \in N^*$, ta có:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$$

$$+ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\frac{1}{n+(n-1)} > \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$$

Ta có: $$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+(n-1)} > \frac{n-1}{2n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \quad \forall n \in N^* \text{ (đpcm)}$$

c) Hướng dẫn: Biến đổi tương đương ta có (đpcm).

Bài 2. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ với $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

b) $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$ với mọi $a, b, c \in R$ khi nào có đẳng thức.

Hướng dẫn

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số không âm ta có:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}\,,\ b + c \geq 2\sqrt{bc}\,,\ c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c;\ b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2abc^2;\ a^2b^2 + c^2a^2 \geq 2a^2bc$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức sau:

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2(a^2bc + ab^2c + abc^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^2b^2 = b^2c^2 = c^2a^2$ (chẳng hạn $a = b = c = 1$).

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $f(x) = \left|x + \frac{1}{x}\right|$; b) $g(x) = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $f(x) = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $|x| + \frac{1}{|x|} \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 2, \forall x \neq 0$.

Vậy Min $f(x) = 2$ đạt được khi $|x| = \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

b) Đáp số: Min $g(x) = 2$.

Bài 4. Tìm các giá trị của tham số m sao cho hệ bất phương trình sau có nghiệm $\begin{cases} \frac{7}{6}x - \frac{1}{2} > \frac{3x}{2} - \frac{13}{3} \\ m^2x + 1 \geq m^4 - x \end{cases}$

Hướng dẫn

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 7x - 3 > 9x - 26 \\ (m^2 + 1)x \geq m^4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x < 23 \\ x \geq m^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{23}{2} \\ x \geq m^2 - 1 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2 - 1 < \frac{23}{2} \Leftrightarrow |m| < \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Bài 5. Với giá trị nào của m, bất phương trình:

$(m^2 + 1)x + m(x + 3) + 1 > 0$ nghiệm đúng $\forall x \in [-1; 2]$?

Đáp số: $0 < m < 2$

Bài 6. Giải và biện luận các bất phương trình sau:

a) $a^2x + 1 > (3a - 2)x - 3$; **b)** $2x^2 + (m - 9)x + m^2 + 3m + 4 \geq 0$

Hướng dẫn

a) Học sinh tự giải.

b) Xét tam thức: $2x^2 + (m - 9)x + m^2 + 3m + 4$ có $\Delta = -7(m^2 + 6m - 7)$

* *Trường hợp 1:* Nếu $m^2 + 6m - 7 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 1 \\ m \leq -7 \end{array}\right.$ thì $\Delta \leq 0$

$\Rightarrow 2x^2 + (m - 9)x + m^2 + 3m + 4 \geq 0 \ \forall x$

$\Rightarrow$ Tập nghiệm bất phương trình là R.

* *Trường hợp 2:* Nếu $-7 < m < 1$ thì $\Delta' > 0$. Khi đó tập nghiệm bất phương trình:

$$\left(-\infty; \frac{9 - m - \sqrt{-7(m^2 + 6m - 7)}}{4}\right) \cup \left(\frac{9 - m + \sqrt{-7(m^2 + 6m - 7)}}{4}; +\infty\right)$$

Bài 7. Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{x - 2}{x^2 - 9x + 20} > 0$; **b)** $\frac{2x^2 - 10x + 14}{x^2 - 3x + 2} \geq 1$.

Đáp số: **a)** Tập nghiệm: $(2; 4) \cup (5; +\infty)$

b) Tập nghiệm: $(-\infty; 1) \cup (2; 3] \cup [4; +\infty)$

Bài 8. Tìm các giá trị của m sao cho R là tập nghiệm của mỗi bất phương trình:

a) $(m - 4)x^2 - (m - 6)x + m - 5 \leq 0$;

b) $(m^2 - 1)x^2 + 2(m + 1) + 3 > 0$.

Hướng dẫn

a) Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in R$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 4 < 0 \\ \Delta \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ (m-6)^2 - 4(m-4)(m-5) \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m^2 - 12m + 36 - 4m^2 + 36m - 80 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \le 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) Đáp số: $m \le -1$ hoặc $m > 2$

Bài 9. Giải các phương trình sau:

a) $|x^2 - 2x - 3| = 2x - 2$; **b)** $\sqrt{x^2 - 4} = 2(x - \sqrt{3})$.

Đáp số: a) Tập nghiệm: $T = \{\sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}$

b) Tập nghiệm: $T = \left\{\frac{4\sqrt{3}}{3}\right\}$.

Bài 10. Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2 - 4x - 12} \le x - 4$; **b)** $(x-2)\sqrt{x^2+4} \le x^2 - 4$;

c) $\sqrt{x^2 - 8x} \ge 2(x+1)$; **d)** $\sqrt{x(x+3)} \le 6 - x^2 - 3x$.

Hướng dẫn

a) Đáp số: Tập nghiệm $T = [6; 7]$.

b) Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-2)\sqrt{x^2+4} - (x-2)(x+2) \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(\sqrt{x^2+4} - x - 2) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x - 2 \le 0 \\ \sqrt{x^2+4} - x - 2 \ge 0 \end{cases} \right.$$
$$\left. \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ \sqrt{x^2+4} - x - 2 \le 0 \end{cases}\right.$$

Giải ra ta được: $\left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$. Tập nghiệm $T = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

c) Đáp số: Tập nghiệm $T = \left(-\infty; \frac{2\sqrt{13} - 8}{3}\right)$

d) Đáp số: Tập nghiệm $T = [-4; -3] \cup [0; 1]$.

Bài 11. Với các giá trị nào của a, các hệ bất phương trình sau có nghiệm?

a) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0 \\ ax + 4 < 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} 4x + 1 < 7x - 2 \\ x^2 - 2ax + 1 \le 0 \end{cases}$

Đáp số: **a)** $a < -\frac{4}{3}$; **b)** $a > 1$

Bài 12. Trong mỗi câu sau đây, có bốn khẳng định (A), (B), (C) và (D), trong đó chỉ có một khẳng định đúng. Hãy chọn khẳng định đúng trong mỗi câu đó.

a) Tam thức bậc hai: $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - 8 - 5\sqrt{3}$

(A) Dương với mọi $x \in R$;

(B) Âm với mọi $x \in R$;

(C) Âm với mọi $x \in (-2 - \sqrt{3}\,;\, 1 + 2\sqrt{3})$;

(D) Âm với mọi $x \in (-\infty; 1)$.

b) Tam thức bậc hai: $f(x) = (1 - \sqrt{2})x^2 + (5 - 4\sqrt{2})x - 3\sqrt{2} + 6$

(A) Dương với mọi $x \in R$; (B) Dương với mọi $x \in (-3; \sqrt{2})$;

(C) Dương với mọi $x \in (-4; \sqrt{2})$; (D) Âm với mọi $x \in R$.

c) Tập xác định của hàm số:

$$f(x) = \sqrt{(2 - \sqrt{5})x^2 + (12 - 7\sqrt{5})x + 25 - 10\sqrt{5}}$$

(A) R; (B) $(-\infty; 1)$; (C) $[-5; 1]$; (D) $[-5; \sqrt{5}]$.

Đáp số: **a)** (C); **b)** (B); **c)** (D).

Bài 13. **a)** Tập nghiệm của bất phương trình:

$(3 - 2\sqrt{2})x^2 - 2(3\sqrt{2} - 4)x + 6(2\sqrt{2} - 3) \le 0$ là:

(A) $[-\sqrt{2}\,;\, 3\sqrt{2}]$; (B) $(-\infty; 1]$; (C) $[-1; +\infty)$; (D) $[-1; 3\sqrt{2}]$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình: $(2 + \sqrt{7})x^2 + 3x - 14 - 4\sqrt{7} \ge 0$ là:

(A) R; (B) $(-\infty; -\sqrt{7}] \cup [2; +\infty)$;

(C) $[-2\sqrt{2}\,;\, 5]$; (D) $(-\infty; -\sqrt{7}] \cup [1; +\infty)$.

Đáp số: **a)** (A); **b)** (B).

Bài 14. **a)** Nghiệm của phương trình: $\sqrt{x^2 + 10x - 5} = 2(x - 1)$ là:

(A) $x = \dfrac{3}{4}$; (B) $x = 3 - \sqrt{6}$;

(B) $x = 3 + \sqrt{6}$; (C) $x_1 = 3 + \sqrt{6}$ và $x_2 = 2$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình: $\sqrt{(x + 4)(6 - x)} \le 2(x + 1)$ là:

(A) $[-2; 5]$; (B) $\left[\dfrac{\sqrt{109} - 3}{5}; 6\right]$; (C) $[1; 6]$; (D) $[0; 7]$

c) Tập nghiệm của bất phương trình: $\sqrt{2(x - 2)(x - 5)} > x - 3$ là:

(A) $[-100; 2]$; (B) $(-\infty; 1]$;

(C) $(-\infty; 2] \cup [6; +\infty)$; (D) $(-\infty; 2] \cup [4 + \sqrt{5}\,;\, +\infty)$

Đáp số: **a)** (A); **b)** (B); **c)** (D).

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 15. Cho $ab > 1$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$.

Bài 16. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của: $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ với $x > 1$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của: $g(x) = (4 - x)(x + 2)$ với $-2 \leq x \leq 4$.

Bài 17*. Giải và biện luận hệ sau: $\begin{cases} x^2 - (m+2)x + 2m \leq 0 \\ x^2 - (m+3)x + 3m \geq 0 \end{cases}$ theo tham số m.

Bài 18*. Trong các nghiệm của bất phương trình:

$$5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$$

Hãy tìm nghiệm có tổng $x + 3y$ nhỏ nhất.

Chương V

THỐNG KÊ

§1. MỘT VÀI KHÁI NIỆM CƠ BẢN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Thống kê là gì?

Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lí dữ liệu.

2. Mẫu và dấu hiệu:

Một tập hợp hữu hạn của các đơn vị điều tra được gọi là một mẫu, số phần tử của một mẫu được gọi là kích thước của mẫu.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN.

Bài 1. Để điều tra số con trong mỗi gia đình ở huyện A, người ta chọn ra 80 gia đình, thống kê số con của các gia đình đó và thu được mẫu số liệu sau:

2	4	3	2	0	2	2	3	4	5
2	2	5	2	1	2	2	2	3	2
5	2	7	3	4	2	2	2	3	2
3	5	2	1	2	4	4	3	4	3
4	4	4	4	2	5	1	4	4	3
3	4	1	4	4	2	4	4	4	2
3	2	3	4	5	6	2	5	1	4
1	6	5	2	1	1	2	4	3	1

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy tìm các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên?

Hướng dẫn

a) Dấu hiệu là số con trong một gia đình, kích thước mẫu là 80

b) Có tám giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

Bài 2. Điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo KW/h) của 30 gia đình ở một khu phố A, người ta thu được mẫu số liệu sau

165	100	85	65	65	70	50	45	100	45
100	150	100	100	90	53	70	141	42	50
40	75	70	84	59	75	57	133	45	65

a) Dấu hiệu ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Hãy tìm các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên?

Hướng dẫn

Đơn vị điều tra là gia đình. Dấu hiệu là số điện năng tiêu thụ trong một tháng của một gia đình. Kích thước mẫu là 30. Có 18 giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là: 40; 42; 45; 50; 53; 57; 59; 65; 70; 75; 84; 85; 90; 100; 133; 141; 150 và 165.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 3. Để điều tra các con trong mỗi gia đình ở một chung cư gần 100 gia đình. Người ta chọn ra 20 gia đình ở tầng 4 và thu được số liệu sau đây:

2	4	2	1	3	5	1	1	2	3
1	2	2	3	4	1	1	2	3	4

a) Kích thước của mẫu là bao nhiêu?

b) Dấu hiệu ở đây là gì?

Bài 4. Để điều tra về điện năng tiêu thụ trong một tháng (tính theo KW/h) của 30 gia đình ở một phường X người ta thu được số liệu sau:

80	85	65	65	70	50	45	100	45	100
100	100	80	70	65	80	50	90	120	166
40	70	65	45	85	100	85	100	75	50

a) Kích thước của mẫu là bao nhiêu?

b) Có bao nhiêu giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên?

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 3. a) 20;

b) Số con ở mỗi gia đình.

Bài 4. a) 30;

b) 25.

§2. TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bảng phân bố tần số - tần suất

* Tần số của các giá trị x_i là số lần lặp lại của giá trị x_i trong cuộc điều tra. Tần số của giá trị x_i được kí hiệu là n_i.

* Tần suất của giá trị x_i là tỉ số giữa tần số của x_i với tổng số N các phần tử điều tra. Tần suất của giá trị x_i kí hiệu là f_i.

Vậy $f_i = \frac{n_i}{N}$.

* Cách trình bày bảng: có 2 cách trình bày ngang hoặc trình bày đứng, đôi khi trong bảng trình bày đứng ta còn thêm cột nữa dành cho tần suất.

2. Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

Nếu mẫu điều tra có kích thước lớn (nhiều phần tử) hoặc biến lượng lấy nhiều giá trị quá gần nhau thì người ta thường nhóm các giá trị

có thành từng lớp và lập bảng phân bố tần số - tần suất, khi đó bảng này được gọi là bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

Giá trị trung tâm của một lớp bằng trung bình cộng của hai cận của lớp đó. Giá trị trung tâm của một lớp dùng để đại diện cho lớp đó.

3. **Biểu đồ:**

* Biểu đồ hình cột tần số - tần suất.
* Biểu đồ đường gấp khúc tần số - tần suất.
* Biểu đồ hình quạt.

II. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1. Trong một giải bóng đó học sinh, người ta tổ chức một cuộc thi dự đoán kết quả của 25 trận đáng chú ý nhất, sau đây là số phiếu của 25 trận mà ban tổ chức nhận được: 54; 75; 121; 142; 154; 159; 171; 189; 203 211; 225; 247; 251; 259; 264; 278; 290; 305; 315; 322; 355; 367; 388; 450 490. Hãy lập bảng tần số, tần suất ghép lớp gồm 6 lớp: lớp đầu tiên là đoạn [50; 124], lớp thứ 2 là đoạn [125; 199],... (độ dài đoạn là 74).

Hướng dẫn

Lớp	Tần số	Tần suất
[50; 124]	3	12%
[125; 199]	5	20%
[200; 274]	7	28%
[275; 349]	5	20%
[350; 424]	3	12%
[425; 499]	2	8%
	N = 25	

Bài 2. Một trạm kiểm soát giao thông ghi tốc độ (km/h) của 30 chiếc xe ôtô đi qua như sau: 53; 47; 50; 66; 36; 69; 84; 77; 42; 57; 51; 60; 78; 63; 46; 63; 42; 55; 63; 48; 75; 60; 58; 80; 44; 59; 60; 75; 49; 63. Hãy lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm 6 lớp, lớp đầu tiên là đoạn [36; 43], lớp thứ hai là đoạn [44; 51], ... (độ dài mỗi đoạn là 7).

Hướng dẫn

Lớp	Tần số	Tần suất
[36; 43]	3	10%
[44; 51]	6	20%
[52; 59]	6	20%
[60; 67]	8	26,7%
[68; 75]	3	11%
[76; 83]	4	13,3%
	N = 30	

Bài 3. Điều tra về số đĩa CD của 80 gia đình, điều tra viên thu được bảng tần số - tần suất sau:

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[1; 10]	5	6,25
[11; 20]	29	...
[21; 30]	21	...
[31; 40]	16	...
[41; 50]	7	...
[51; 60]	2	...
	N = 80	

a) Điền vào chổ trống (...) ở cột tần suất.

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

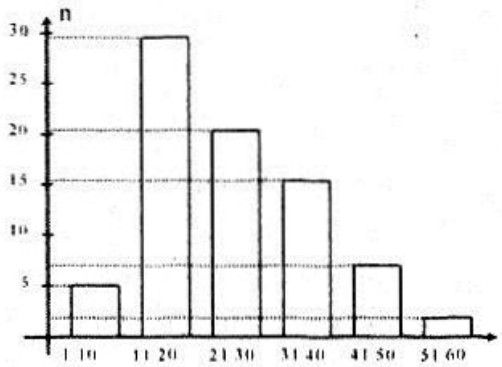
c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

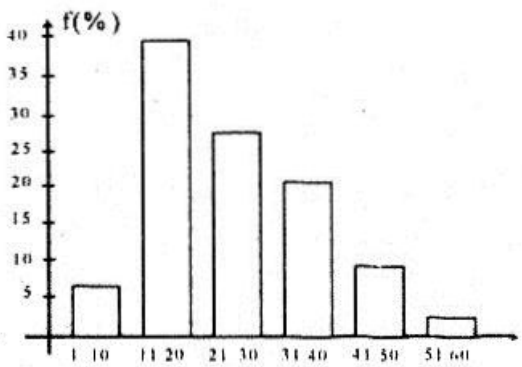
d) Vẽ biểu đồ tần suất hình quạt.

Giải

a)

Lớp	Tần số	Tần suất
[1; 10]	5	6,25%
[11; 20]	29	36,25%
[21; 30]	21	26,25%
[31; 40]	16	20%
[41; 50]	7	8,75%
[51; 60]	2	2,5%
	N = 80	100%

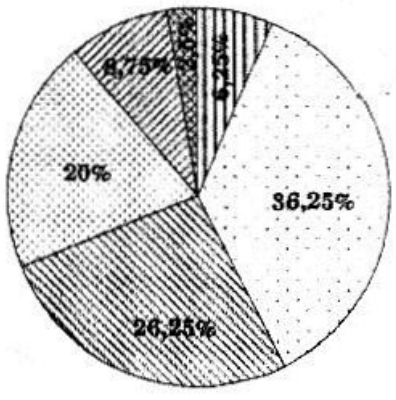




b) Biểu đồ tần số hình cột.

c) Biểu đồ tần suất hình cột.

d) Lớp thứ nhất chiếm 6,25% số liệu, do đó hình quạt tương ứng sẽ chiếm 1/16 của 360°, tức là 22°30'. Ta dùng thước đo độ để dựng hình quạt nói trên, các lớp còn lại tương tự, ta có biểu đồ tần suất hình quạt.



LUYỆN TẬP

Bài 4. Doanh thu của 50 cửa hàng của một công ty trong một tháng như sau (đơn vị tính: triệu đồng): 120; 121; 129; 114; 95; 88; 109; 147; 118; 148; 128; 71; 93; 67; 62; 57; 103; 135; 97; 166; 83; 114; 66; 156; 88; 64; 49; 101; 79; 120; 75; 113; 155; 48; 104; 112; 79; 87; 88; 141; 55; 123; 152; 60; 83; 144; 84; 95; 90; 27.

a) Dấu hiệu cần tìm hiểu, đơn vị điều tra ở đây là gì?

b) Lập bảng tần số - tần suất ghép lớp gồm 7 lớp, lớp đầu tiên là nửa khoảng [26,5 – 48,5), lớp tiếp theo là nửa khoảng [48,5 – 70,5), ...

Hướng dẫn

a) Đơn vị điều tra là: cửa hàng.

Dấu hiệu: Doanh thu của một cửa hàng trong một tháng.

b) Sau đây là bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp:

Lớp	Tần số	Tần suất
[26,5 – 48,5)	2	4%
[48,5 – 70,5)	8	16%
[70,5 – 92,5)	12	24%
[92,5 – 114,5)	12	24%
[114,5 – 136,5)	8	16%
[136,5 – 158,5)	7	14%
[158,5 – 180,5]	1	2%
	N = 50	

Bài 5. Một cuộc điều tra 50 nhà nhiếp ảnh nghiệp dư với câu hỏi "Trong tháng trước anh (chị) sử dụng hết bao nhiêu cuộn phim?" Kết quả thu được như sau: 5; 3; 3; 1; 4; 3; 4; 3; 6; 8; 4; 5; 3; 4; 2; 4; 7; 6; 5; 9; 6; 6; 6; 7; 0; 11; 3; 12; 4; 7; 14; 0; 2; 4; 4; 3; 5; 15; 0; 10; 4; 5; 2; 3; 5; 1; 8; 12; 10.

a) Dấu hiệu đơn vị cần điều tra ở đây là gì?

b) Lập bảng tần số ghép lớp, với lớp đầu tiên là đoạn [0; 2], tiếp theo là lớp [3; 5],... lớp cuối cùng là [15; 17].

c) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

Hướng dẫn

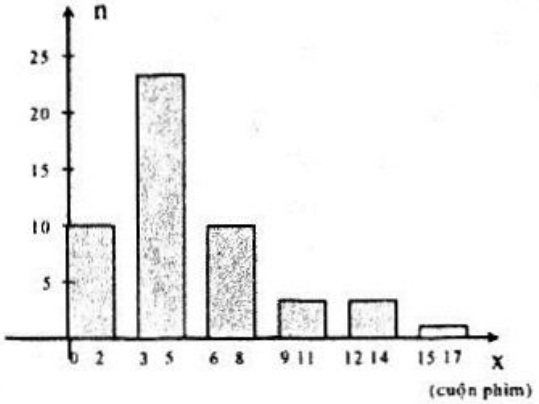
a) Đơn vị điều tra: Nhà nhiếp ảnh nghiệp dư.

Dấu hiệu: Số cuộn phim một nhà nhiếp ảnh dùng trong tháng trước.

b) Bảng tần số ghép lớp:

Lớp	Tần số
[0; 2]	10
[3; 5]	23
[6; 8]	10
[9; 11]	3
[12; 14]	3
[15; 17]	1
	N = 50

c) Biểu đồ hình cột tần số:



Bài 6. Một thư viện thống kê số người đến đọc sách vào buổi tối trong 30 ngày của tháng vừa qua như sau: 85; 81; 65; 58; 47; 30; 51; 92; 85; 42; 55; 37; 31; 82; 63; 33; 44; 93; 77; 57; 44; 74; 63; 67; 46; 73; 52; 52; 53; 47; 35.

a) Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp với lớp đầu tiên là đoạn [25; 34], lớp tiếp theo là đoạn [35; 44],... lớp cuối cùng là đoạn [85; 94] (độ dài mỗi đoạn là 9).

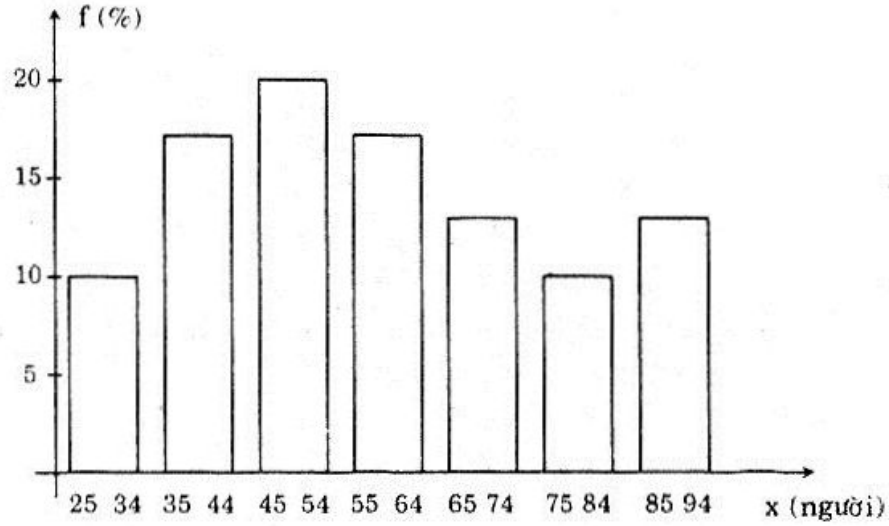
b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

Hướng dẫn

a) Bảng phân bố tần số - tần suất:

Lớp	Tần số	Tần suất
[25; 34]	3	10%
[35; 44]	5	17%
[45; 54]	6	20%
[55; 64]	5	17%
[65; 74]	4	13%
[75; 84]	3	10%
[85; 94]	4	13%
	N = 30	

b) Biểu đồ hình cột tần suất:



III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 7. Hãy điền vào chỗ trống (...) ở cột tần suất trong bảng sau:

Lớp	Tần số	Tần suất
[159,5; 162,5)	6	16,7%
[162,5; 165,5)	12	33,3%
[165,5; 168,5)	10	27,7%
[168,5; 171,5)	2	...
[171,5; 174,5]	3	...
	N = 36	

Bài 8. Thống kê điểm thi môn toán trong kì thi vừa qua của 400 em học sinh cho ta kết quả sau:

Điểm bài thi (x)	Tần số (n)	Tần suất (f)
0	...	1,5%
1	15	3,75%
2	43	10,75%
3	53	13,25%
4	85	21,15%
5	...	18%
6	55	...
7	33	...
8	18	...
9	10	...
10	10	...
	N = 400	

Bài 9. Cho bảng phân bố tần suất ghép lớp sau: Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Vinh từ 1961 đến 1990 (30 năm):

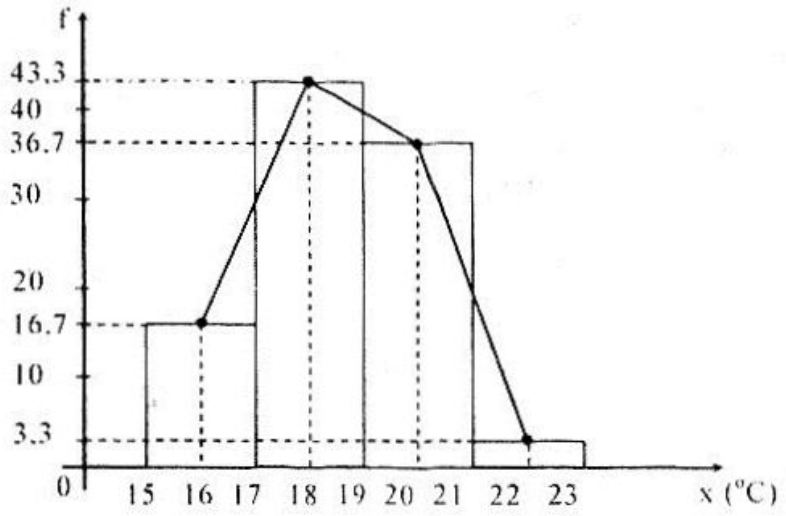
Các lớp của nhiệt độ X (°C)	x_i^o	Tần suất f_i (%)
[15; 17]	16	16,7
[17; 19]	18	43,3
[19; 21]	20	36,7
[21; 23]	22	3,3
Cộng		100%

Hãy mô tả bảng bằng cách vẽ biểu đồ tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất trên cùng một hệ tọa độ.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7; Bài 8. (Học sinh tự giải).

Bài 9. Nhiệt độ trung bình của tháng 12 tại thành phố Vinh từ 1961 đến hết 1990 (30 năm):



§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

2. Số trung vị:

• Khi các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch rất lớn đối với nhau thì số lượng trung bình khó có thể đại diện cho các số liệu trong mẫu. Có một và chỉ một số khác thích hợp hơn trong trường hợp này. Đó là số trung vị.

• Giả sử ta có mẫu gồm n số liệu được xếp theo thứ tự không giảm. Nếu n là số lẻ thì số liệu đứng thứ $\frac{N+1}{2}$ (số liệu đứng chính giữa) gọi là số trung vị. Nếu n là số chẵn, ta lấy số trung bình cộng của hai số liệu đứng thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}+1$ là số trung vị.

3. Mốt:

Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng phân bố tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là mốt của mẫu số liệu và kí hiệu là M_o.

4. Phương sai và độ lệch chuẩn:

• Phương sai s^2 được tính:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$

($\bar{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu).

• Độ lệch chuẩn s được tính: $s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$.

• Nếu số liệu được cho dưới dạng phân bố tần số thì phương sai được tính: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n_i} n_i x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n_i} n_i x_i\right)^2$

5. Hệ số biến thiên (tính theo %) là tỉ số giữa độ lệch chuẩn và số trung bình: $\frac{s}{\bar{x}}.100\%$.

II. BÀI TẬP CƠ BẢN

Bài 1. 100 học sinh tham dự kì thi học sinh sinh giỏi Toán (thang điểm là 20) kết quả được cho bởi bảng sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2

a) Tính số trung bình.

b) Tính số trung vị và mốt. Nêu ý nghĩa.

c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

a) Số trung bình là 15,23.

b) Số trung vị là 15,5 (vì số liệu đứng thứ 50 là 15, số liệu đứng thứ 51 là 16). Mốt là 16.

Có khoảng một nữa học sinh có điểm dưới 15,5 và số học sinh đạt 16 điểm là nhiều nhất.

c) Phương sai là 3,96. Độ lệch chuẩn là 1,99.

Bài 2. 179 củ khoai tây được chia thành chín nhóm căn cứ trên khối lượng của chúng (đơn vị là gam). Ta có bảng phân bố tần số sau đây:

Lớp	Tần
[10; 19]	1
[20; 29]	14
[30; 39]	21
[40; 49]	73
[50; 59]	42
[60; 69]	13
[70; 79]	9
[80; 89]	4
[90; 99]	2
	N = 179

Tính khối lượng trung bình của một củ khoai tây. Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

Lấy trung điểm các khoảng là đại diện ta có:

Lớp	Trung điểm	Tần
[10; 19]	14,5	1
[20; 29]	24,5	14
[30; 39]	34,5	21
[40; 49]	44,5	73
[50; 59]	54,5	42
[60; 69]	64,5	13
[70; 79]	74,5	9
[80; 89]	84,5	4
[90; 99]	94,5	2
		N = 179

Từ bảng trên ta có:

$$\bar{x} = \frac{1}{179}(14,5.1 + 24,5.14 + 34,5.21 + 44,5.73 + 54,5.42 +$$
$$+ 64,5.13 + 74,5.9 + 84,5.4 + 94,5.2) = 48,35$$

- Phương sai: $s^2 \approx 194,64$
- Độ lệch chuẩn: $s \approx 13,95$.

Bài 3. Bảng sau đây trích từ sổ theo dõi bán hàng của một cửa hàng bán xe máy:

Số xe bán	0	1	2	3	4	5
Tần số (ngày)	2	13	15	12	7	3

a) Tìm số xe trung bình bán được trong mỗi ngày.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

Số trung bình là: 2,35.

Phương sai là: 1,57.

Độ lệch chuẩn: 1,25.

LUYỆN TẬP

Bài 4. Số liệu sau đây cho ta lãi (quy tròn) hàng tháng của một cửa hàng trong năm 2000. Đơn vị là triệu đồng.

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lãi	12	15	18	13	13	16	18	14	15	17	20	17

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

a) Số trung bình là 15,67 triệu.

Số trung vị là 17 triệu (vì số liệu đứng thứ sáu là 16, đứng thứ bảy là 18).

b) Phương sai là: 5,39 triệu.

Độ lệch chuẩn là: 2,32 triệu.

Bài 5. Một của hàng vật liệu xây dựng thống kê số bao xi măng bán ra trong 23 ngày cuối năm 2004. Kết quả như sau: 47; 54; 43; 50; 61; 36; 65; 54; 50; 43; 62; 59; 36; 45; 45;33; 53; 67; 21; 45; 50; 36; 58.

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

a) Số trung bình là: 48,39.

Số trung vị là 50 (vì sau khi sắp xếp các số liệu theo thứ tự không giảm, số liệu đứng thứ 12 là 50).

b) Phương sai là 121,98; Độ lệch chuẩn là 11,04.

Bài 6. Số lượng khách đến tham quan một địa điểm du lịch trong mỗi tháng được thống kê như sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số khách	430	560	450	550	760	430	525	110	635	450	800	950

a) Tìm số trung bình, số trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

a) Số trung bình là 554,17

Số trung vị là 537,5 (vì sau khi sắp xếp các số liệu theo thứ tự không giảm, số liệu đứng thứ 6 là 525, số liệu đứng thứ 7 là 550).

b) Phương sai là 43061,81; Độ lệch chuẩn là 207,51.

Bài 7. Trên hai con đường A và B, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ (km/h) của 30 chiếc ôtô trên mỗi con đường như sau:

- Con đường A: 60; 65; 70; 68; 62; 75; 80; 83; 82; 69; 73; 75; 85; 72; 67; 88; 90; 85; 72; 63; 75; 76; 85; 84; 70; 61; 60; 65; 73; 76.
- Con đường B: 76; 64; 58; 82; 72; 70; 68; 75; 63; 67; 74; 70; 79; 80; 73; 75; 71; 68; 72; 73; 79; 80; 63; 62; 71; 70; 74; 69; 60; 63.

a) Tìm số trung bình, số trung vị, phương sai và độ lệch chuẩn của tốc độ ôtô trên mỗi con đường A và B.

b) Theo em thì lái xe trên con đường nào an toàn hơn?

Hướng dẫn

a)
- Trên con đường A: Số trung bình là 73,55km/h; Số trung vị là 73km/h; Phương sai là 77,14; Độ lệch chuẩn là 8,78.
- Trên con đường B: Số trung bình là 70,81km/h; Số trung vị là 71km/h; Phương sai là 37,73; Độ lệch chuẩn là 6,11.

b) Lái xe trên con đường B an toàn hơn trên con đường A vì vận tốc trung bình của ôtô trên con đường B nhỏ hơn trên con đường A và độ lệch chuẩn của ôtô trên con đường B cũng nhỏ hơn trên con đường A.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 8. Kết quả học tập của hai học sinh An và Bình trong năm học vừa qua như sau:

Môn	Điểm TB của An	Điểm TB của Bình
Toán	8	8,5
Lí	7,5	9,5
Hoá	7,8	9,5
Sinh	8,3	8,5
Văn	7	5
Lịch sử	8	5,5
Địa lí	8,2	6.0
Tiếng Anh	9	9
Thể dục	8	9
Kĩ thuật	8	9
Giáo dục công dân	9	10

Tính điểm trung bình (không kể hệ số) các môn học của An và của Bình. Theo em, bạn nào học khá hơn.

Bài 9. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	21	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	N = 40

a) Tìm sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 10. Đo chiều cao của 36 học sinh của một trường, ta có mẫu số liệu sau sắp xếp theo thứ tự tăng (đơn vị cm): 160; 161; 161; 162; 162; 162; 163; 163; 163; 164; 164; 164; 164; 165; 165; 165; 165; 165; 166; 166; 166; 166; 167; 167; 168; 168; 168; 168; 169; 169; 170; 171; 171; 172; 172; 174. Tìm số trung vị của mẫu số liệu này.

Bài 11. Người ta đo chiều cao của 50 cây lim trong một cánh rừng lim, làm tròn các số đó đến đơn vị là mét (m), sau đó lập bảng phân bố tần số thì thu được bảng:

Chiều cao x_i (m)	9	10	11	12	13	14	Cộng
Tần số n_i	6	7	10	10	9	8	50

Hãy tìm mốt M_0 của bảng phân bố tần số đã cho.

Bài 12. Điều tra viên thu thập được hai mẫu số liệu với dấu hiệu điều tra là mức thu nhập của mỗi người trong một tháng: trên mẫu thứ nhất đơn vị điều tra là những người làm nghề A và trên mẫu thứ 2 là những người làm nghề B. Số trung bình của mẫu thứ nhất là 4 triệu đồng với độ lệch chuẩn là 0,4 triệu số trung bình của mẫu thứ hai là 2,1 triệu đồng với độ lệch chuẩn là 0,24 triệu. Tính hệ số biến thiên của hai mẫu số liệu này.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 8. Điểm trung bình các môn học của An là 8,1. Điểm trung bình các môn học của Bình là 8,09. An và Bình có điểm xấp xỉ nhau. Tuy nhiên An học đều các môn còn Bình thì học giỏi các môn tự nhiên và học trung bình ở các môn xã hội.

Bài 9.

Trước hết ta có: $\sum_{i=1}^{5} n_i x_i = 884$; $\sum_{i=1}^{5} n_i x_i^2 = 19598$

Sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng là:

$$\bar{x} = \frac{884}{40} = 22,1 \text{ (tạ)}$$

Phương sai: $s^2 = \frac{19598}{40} - \left(\frac{884}{40}\right)^2 = 1,54$

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{1,54} \approx 1,24$

Bài 10. Số liệu đứng thứ 18 là 165, đứng thứ 19 là 166.

Do vậy số trung vị là: $\frac{165 + 166}{2} = 165,5$.

Bài 11. $M_0 = \frac{11 + 12}{2} = 11,5$ (m).

Bài 12. Hệ số biến thiên của mẫu thứ nhất là:

$$\frac{0,4}{4}.100\% = 10\%.$$

Hệ số biến thiên của mẫu thứ hai là:

$$\frac{0,24}{2,1}.100\% \approx 11,34\%.$$

Vậy sự chênh lệch tương đối về mức thu nhập hàng tháng của những người làm nghề A nhỏ hơn những người làm nghề B.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG V

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Học sinh cần nắm vững một số kiến thức cơ bản sau:

1. Thống kê là gì?
2. Mẫu và dấu hiệu.
3. Bảng phân bố tần số - tần suất.
4. Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.
5. Biểu đồ.
6. Số trung bình.
7. Số trung vị, mốt.
8. Phương sai và độ lệch chuẩn.
9. Hệ số biến thiên.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Chọn câu đúng trong bốn phương án trả lời sau:

Người ta xác định cân nặng của 10 học sinh và xếp thứ tự tăng dần, khối lượng của 10 số liệu này là:

(A) Số cân nặng của học sinh thứ năm

(B) Số cân nặng của học sinh thứ sáu

(C) Số cân nặng trung bình của em thứ năm và em thứ sáu.

(D) Không phải các số trên.

Hướng dẫn: Chọn (C).

Bài 2. Chọn câu đúng trong bốn phương án trả lời sau:

Độ lệch chuẩn là:

(A) Bình phương của phương sai;

(B) Một nửa của phương sai;

(C) Căn số học bậc hai của phương sai;

(D) Không phải là các công thức trên.

Hướng dẫn: Chọn (C).

Bài 3. 400 quả trứng được phân thành năm lớp căn cứ trên khối lượng (đơn vị gam) của chúng. Ta có bảng phân bố tần số ghép lớp:

Lớp	Tần số
[27,5; 32,5)	18
[32,5; 37,5)	76
[37,5; 42,5)	200
[42,5; 47,5)	100
[47,5; 52,5]	6
	N = 400

a) Tính số trung bình.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

Lấy trung điểm các khoảng làm đại diện. Ta có bảng sau:

Lớp	Trung điểm	Tần số
[27,5; 32,5)	30	18
[32,5; 37,5)	35	76
[37,5; 42,5)	40	200
[42,5; 47,5)	45	100
[47,5; 52,5]	50	6
		N = 400

a) Số trung bình là 40g.

b) Phương sai là 17. Độ lệch chuẩn là 4,12.

Bài 4. Một người lái xe thường xuyên đi lại giữa hai địa điểm A và B thời gian đi (tính bằng phút) được ghi lại trong bảng phân bố tần số sau:

Lớp	Tần số
[40; 44]	9
[45; 49]	15
[50; 54]	30
[55; 59]	17
[60; 64]	17
[65; 69]	12

Tính thời gian trung bình mà người đó đi từ A đến B.

Hướng dẫn

Lấy trung điểm các khoảng làm đại diện. Ta có bảng sau:

Lớp	Trung điểm	Tần số
[40; 44]	42	9
[45; 49]	47	15
[50; 54]	52	30
[55; 59]	57	17
[60; 64]	62	17
[65; 69]	67	12
		N = 100

Thời gian trung bình mà người đó đi từ A đến B là 54,7 (phút).

Bài 5. Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mất hột. Kết quả thu được như sau: 21; 17; 22; 18; 20; 17; 15; 13; 15; 20; 15; 12; 18; 17; 25; 17; 21; 15; 12; 18; 16; 23; 14; 18; 19; 13; 16; 19; 18; 17. Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

Số trung bình là 17,37.

Độ lệch chuẩn là 3,12.

Bài 6. Người ta tiến hành phỏng vấn một số người về một bộ phim mới chiếu trên truyền hình. Người điều tra yêu cầu cho điểm bộ phim (thang điểm là 100). Kết quả được trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp:

Lớp	Tần số
[50; 60)	2
[60; 70)	6
[70; 80)	10
[80; 90)	8
[90; 100]	4
	N = 30

a) Tính số trung bình.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

Lấy trung điểm các khoảng làm đại diện. Ta có bảng sau:

Lớp	Trung điểm	Tần số
[50; 60)	55	2
[60; 70)	65	6
[70; 80)	75	10
[80; 90)	85	8
[90; 100]	95	4
		N = 30

a) Số trung bình là 77.

b) Phương sai là 122,66. Độ lệch chuẩn là 11,08.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 7. Trong một giải bóng đá, người ta tổ chức một cuộc thi dự đoán. Kết quả của 25 trận đấu đáng chú ý nhất. Sau đây là bảng tần số - tần suất ghép lớp thu được:

Lớp	Tần số	Tần suất
[50; 124]	3	12%
[125; 199]	5	20%
[200; 274]	7	28%
[275; 349]	*	20%
[350; 424]	3	***
[425; 499]	2	8%
	N = **	100%

Hãy điền số thích hợp vào các vị trí:

a) * b) ** c) ***

Bài 8. Điều tra về số tài liệu môn toán của 80 giáo viên toán, điều tra viên thu được bảng tần số - tần suất sau:

Lớp	Tần số	Tần suất
[1; 10]	8	...
[11; 20]	32	...
[21; 30]	24	...
[31; 40]	19	...
[41; 50]	10	...
[51; 60]	7	...
	N = 100	...

a) Điền vào chỗ trống (...) ở cột tần suất.

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số.

c) Vẽ biểu đồ hình cột tần suất.

d) Vẽ biểu đồ hình quạt.

Bài 9. Sản lượng lúa (đơn vị là tấn) của 60 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng phân bố tần số sau đây:

Sản lượng (x)	30	31	32	33	34	
Tần số (n)	9	12	15	14	10	N = 60

a) Tìm sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 7. Đáp số: a) 5; b) 25; c) 12%.

Bài 8. Bài 9 (Học sinh tự giải).

Chương VI

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đơn vị đo góc và cung tròn, độ dài cung tròn:

   * Đơn vị "Độ" và "Radian"

     Góc bẹt có số đo 180°, $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$

   * $180^\circ = \pi$ rad $\Rightarrow$ $a^\circ = \dfrac{\pi a}{180}$ rad $(0 \le a \le 360)$

     $$\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180a}{\pi}\right)^\circ \quad (0 \le \alpha \le 2\pi)$$

   * Cung tròn có bán kính R, có số đo a° $(0 \le a \le 360)$ thì độ dài

     $$l = \frac{\pi a R}{180}$$

2. Góc lượng giác và cung lượng giác:

   Cho hai tia Ou và Ox ta xác định được góc lượng giác, kí hiệu: (Ou; Ox) và sđ(Ou; Ox) = $\alpha + k2\pi$, $k \in Z$ $(0 \le \alpha < 2\pi)$.

3. Hệ thức Salơ:

   Cho ba tia tùy ý Ou, Ov và Ow, ta có:

   sđ(Ou; Ov) + sđ(Ov; Ow) = sđ(Ou; Ow) + $k2\pi$, $k \in Z$.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) Số đo của cung tròn phụ thuộc vào bán kính của nó.

b) Độ dài của cung tròn tỉ lệ với số đo của cung tròn.

c) Độ dài của cung tròn tỉ lệ với bán kính của nó.

d) Nếu Ou, Ov là hai tia đối nhau thì số đo của góc lượng giác (Ou; Ov) là $(2k + 1)\pi$, $k \in Z$.

Hướng dẫn

a) Sai; **b)** Đúng; **c)** Đúng; **d)** Đúng.

Bài 2. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà bưu điện bờ hồ Hà Nội, theo thứ tự dài 1,75m và 1,26m. Hỏi trong 15 phút mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

Hướng dẫn

Trong 15 phút, mũi kim phút vạch cung tròn có số đo $\frac{\pi}{2}$ rad nên cung đó có độ dài $\frac{\pi}{2}$. 1,75 ≈ 2,75 (m) và mũi kim giờ vạch cung tròn có số đo $\frac{\pi}{24}$ rad nên có độ dài $\frac{\pi}{24}$. 1,2 6 ≈ 0,16 (m).

Bài 3. Điền vào ô trống trong bảng sau:

Số đo độ	-60°	-240°			3100°	
Số đo Radian			$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{16\pi}{3}$		$\frac{68\pi}{5}$

Hướng dẫn

Ta có bảng sau:

Số đo độ	-60°	-240°	-135°	-960°	3100°	2448°
Số đo Radian	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{16\pi}{3}$	$\frac{155\pi}{9}$	$\frac{68\pi}{5}$

Bài 4. a) Đổi số đo độ của các cung tròn sau thành số đo Radian (chính xác đến phần nghìn): $21^\circ30'$ và $75^\circ54'$

b) Đổi số đo Radian của các cung tròn sau ra số đo độ: 2,5 (rad) và $\frac{2}{\pi}$ (rad) (có thể dùng máy tính bỏ túi)

Hướng dẫn

a) $21^\circ30' = \frac{21,5.\pi}{180} \approx 0,375$ (rad); $75^\circ54' = \frac{75,9.\pi}{180} \approx 1,325$ (rad);

b) 2,5 rad $= \left(\frac{2,5.180}{\pi}\right)^\circ \approx 143^\circ14'$;

$\frac{2}{\pi}$ rad $= \left(\frac{\frac{2}{\pi}.180}{\pi}\right)^\circ = \left(\frac{360}{\pi^2}\right)^\circ \approx 36^\circ29'$

Bài 5. Coi kim giờ đồng hồ là tia Ou, kim phút là tia Ov. Hãy tìm số đo của góc lượng giác (Ou; Ov) khi đồng hồ chỉ 3 giờ, chỉ 4 giờ, chỉ 9 giờ, chỉ 10 giờ.

Giải

* Khi đồng hồ chỉ 3 giờ, ta có: sđ(Ou, Ov) = $\frac{\pi}{2} + k2\pi$, (k ∈ Z).

* Khi đồng hồ chỉ 4 giờ, ta có: sđ(Ou, Ov) = $\frac{2\pi}{3} + k2\pi$, (k ∈ Z).

* Khi đồng hồ chỉ 9 giờ, ta có: sđ(Ou, Ov) = $-\frac{\pi}{2} + k2\pi$, (k ∈ Z).

* Khi đồng hồ chỉ 10 giờ, ta có: $sđ(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in Z)$.

Bài 6. Chứng minh:

a) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo $\frac{10\pi}{3}$ và $\frac{22\pi}{3}$ thì có cùng tia cuối.

b) Hai góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo là 645° và -435° thì có cùng tia cuối.

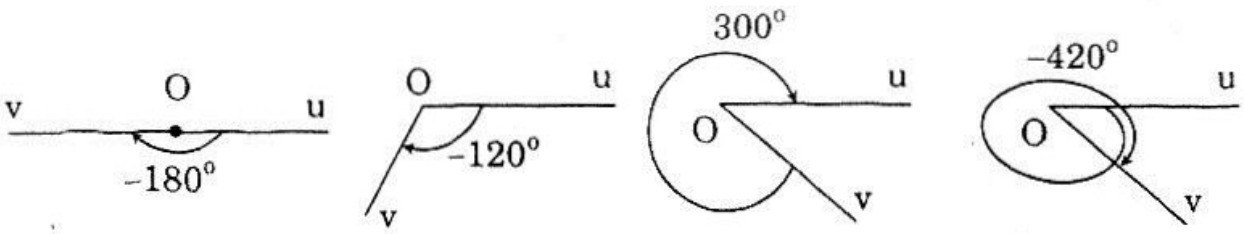
Giải

a) Ta có: $\frac{22\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{10\pi}{3} + 4\pi \Rightarrow$ Hai góc có cùng tia cuối.

b) Ta có: $645^\circ = -75^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ và $-435^\circ = -75^\circ - 360^\circ$

$\Rightarrow$ Hai góc có cùng tia cuối.

Bài 7. Tìm số đo a°, $-180^\circ < a^\circ \leq 180^\circ$ của góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối với góc trên mỗi hình sau:



Giải

Từ các hình trên ta có đáp số theo thứ tự sau:

180°; -120°; -60°; -60°

LUYỆN TẬP

Bài 8. Cho ngũ giác đều $A_0A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo (độ và Radian) của các cung lượng giác:

$\overset{\frown}{A_0A_i}$, $\overset{\frown}{A_iA_j}$ $(i, j = 0, 1, 2, 3, 4;\ i \neq j)$

Giải

$Sđ\overset{\frown}{A_0A_i} = i\frac{2\pi}{5} + k2\pi$ (hay $sđ\overset{\frown}{A_0A_i} = i72^\circ + k360^\circ$, $k \in Z$), $\forall i = \overline{0,4}$

Theo hệ thức Salơ, ta có:

$Sđ\overset{\frown}{A_iA_j} = sđ\overset{\frown}{A_0A_j} - sđ\overset{\frown}{A_0A_i} + k2\pi$ $(k \in Z)$

$= (j - i)\frac{2\pi}{5} + k2\pi$ $(i, j = \overline{0,4},\ i \neq j)$ (hay $(j - i)72^\circ + k360^\circ$)

Bài 9. Với mỗi góc lượng giác có số đo: -90°, 1000°, $\frac{30\pi}{7}$ và $-\frac{15\pi}{11}$.

Tìm góc lượng giác cùng tia đầu và tia cuối với nó, có số đo là số dương nhỏ nhất.

Giải

* Nếu góc lượng giác có số đo là a° thì ta cần xác định số nguyên k để: $0^\circ < a^\circ + k360^\circ \le 360^\circ$, khi đó $a^\circ + k360^\circ$ là số dương nhỏ nhất cần tìm cụ thể là:

Với $a = -90^\circ$ thì $k = 1$. Số dương nhỏ nhất cần tìm là 270.

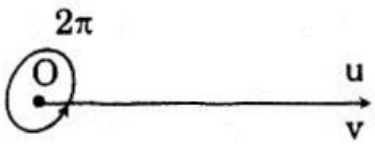
Với $a = 1000$ thì $k = -2$. Số dương nhỏ nhất cần tìm là 280.

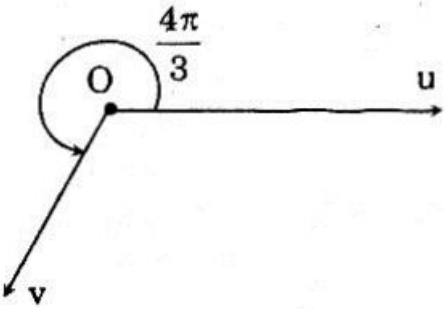
* Nếu góc lượng giác có số đo α thì cần xác định $k \in Z$ để: $0 < \alpha + k2\pi \le 2\pi$, khi đó $\alpha + k2\pi$ là số dương nhỏ nhất cần tìm cụ thể là:

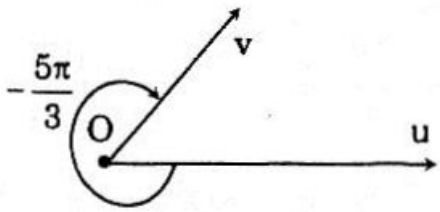
Với $\alpha = \frac{30\pi}{7}$ thì $k = -2$. Số dương nhỏ nhất cần tìm là $\frac{2\pi}{7}$.

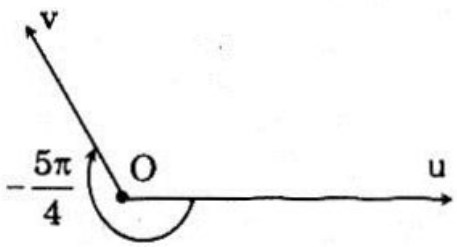
Với $\alpha = -\frac{15\pi}{11}$ thì $k = 1$. Số dương nhỏ nhất cần tìm là $\frac{7\pi}{11}$.

Bài 10. Tìm số đo Rađian α, $-\pi < \alpha \le \pi$, của góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc trên mỗi hình sau:









Giải

Từ đầu bài ta có đáp số theo thứ tự sau: $0, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$.

Bài 11. Chứng minh rằng hai tia Ou và Ov vuông góc với nhau khi và chỉ khi góc lượng giác (Ou; Ov) có số đo $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

Giải

Do $Ou \perp Ov$ nên: $(Ou, Ov) = \frac{\pi}{2} + l2\pi \quad (l \in Z)$

hoặc $(Ou, Ov) = -\frac{\pi}{2} + m2\pi = \frac{\pi}{2} + (2m - 1)\pi \quad (m \in Z)$

Có thể viết chung là: $\frac{\pi}{2} + k\pi = (1 + 2k)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$, từ đó ta suy ra:

$(Ou, Ov) = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

Bài 12. Kim giờ và kim phút đồng hồ bắt đầu cùng chạy từ vị trí tia Ox chỉ số 12 (tức lúc 0 giờ). Sau thời gian t giờ ($t \geq 0$), kim giờ đến vị trí tia Ou kim phút đến vị trí tia Ov.

a) Chứng minh rằng khi quay như thế, kim giờ quét góc lượng giác (Ox; Ou) có số đo $-\frac{\pi}{6}t$, kim phút quét góc lượng giác (Ox; Ov) có số đo $-2\pi t$. Hãy tìm số đo của góc lượng giác (Ou; Ov) theo t.

b) Chứng minh rằng hai tia Ou, Ov trùng nhau khi và chỉ khi $t = \frac{12k}{11}$ với k là một số tự nhiên nào đó.

Giải

a) * Khi kim giờ quay được một vòng (12 giờ) thì nó quét được một góc -2π (quay theo chiều âm). Vậy sau thời gian t giờ ($t \geq 0$).
Kim giờ quét được một góc lượng giác (Ox; Ou) có số đo:

$$\text{sđ}(Ox; Ou) = \frac{-2\pi . t}{12} = -\frac{\pi t}{6}.$$

* Dễ thấy trong thời gian 1 giờ thì kim phút quét được một góc -2π. Vậy trong khoảng thời gian t (giờ) kim phút quét được một góc lượng giác có số đo: $\text{sđ}(Ox; Ov) = \frac{-2\pi . t}{1} = -2\pi t$.

* Theo hệ thức Salơ, ta có:

$$\text{sđ}(Ou; Ov) = \text{sđ}(Ou; Ox) + \text{sđ}(Ox; Ov) + k2\pi$$

$$= \frac{\pi}{6}t - 2\pi t + k2\pi = \pi\left(\frac{t}{6} - 2t + 2k\right)$$

$$= \frac{\pi}{6}(-11t + 12k) \text{ với } t \geq 0, k \in Z.$$

b) Hai tia Ou, Ov trùng nhau khi và chỉ khi: $\text{sđ}(Ou; Ov) = 0^\circ$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{6}(-11t + 12k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{12k}{11}, k \in N.$$

Bài 13. Hỏi hai góc lượng giác có số đo $\frac{35\pi}{3}$ và $\frac{m\pi}{5}$ ($m \in Z$) có thể có cùng tia đầu tia cuối không?

Giải

Ta có: $\frac{35\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 12\pi$ như vậy không thể tồn tại $m \in Z$ nào để hai góc lượng giác trên có cùng tia đầu và tia cuối.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 14. a) Đổi $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{5}$, 1 radian ra độ.

b) Đổi 35°, $12^\circ 30'$, -135° ra radian.

Bài 15. Một bánh xe có bán kính R = 2,4m quay một góc bằng $30^{\circ}30'$. Tính độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe.

Bài 16. Trên đường tròn lượng giác (lấy A làm gốc). Định điểm M biết sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

Bài 17*. Biểu diễn các góc lượng giác sau dưới một công thức tổng quát:

$$x_1 = k\pi \quad \text{và} \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 18*. Xác định điểm cuối của cung x biết: $2\sin x - 1 \geq 0$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 14. a) 120°; 108°; $57^{\circ}17'45''$.

b) 0,6109; 0,2182; $-\frac{3\pi}{4}$.

Bài 15. 1,2768 (m).

Bài 16. Xét $k = 4m$, $k = 4m + 1$, $k = 4m + 2$, $k = 4m + 3$ với $m \in Z$. Suy ra được bốn điểm cần tìm trên đường tròn lượng giác.

Bài 17. $x = k\frac{\pi}{3}$.

Bài 18. Ta có: $2\sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}$

Trên trục tung lấy I_0 sao cho hoành độ x_0 của điểm I_0 bằng $\frac{1}{2}$. Kẻ MN qua I và song song với x'Ox (M, N thuộc đường tròn lượng giác), khi đó ta thấy: $\frac{\pi}{6} + k2\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in Z)$. Vậy $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Suy ra nếu điểm cuối của cung x thuộc $\overset{\frown}{MBN}$ thì $2\sin x - 1 \geq 0$.

(Học sinh tự vẽ hình.)

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Cho góc lượng giác (Ou; Ov) có số đo α ta có các tính chất cơ bản sau:

1. $\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$; $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$

2. $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$; $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$

3. $\tan(\alpha + k2\pi) = \tan\alpha$ $\cot(\alpha + k2\pi) = \cot\alpha$

4. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \forall\alpha$

5. $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$; $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$(\alpha \neq k\frac{\pi}{2})$ $(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(\alpha \neq k\pi)$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

a) Nếu α âm thì ít nhất một trong các số $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ phải âm.

b) Nếu α dương thì $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

c) Các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi các số thực sau trùng nhau: $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$; $-\frac{71\pi}{4}$.

d) Ba số sau bằng nhau: $\cos^2 45^\circ$; $\sin(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3})$ và $-\sin 210^\circ$

e) Hai số sau khác nhau: $\sin\frac{11\pi}{6}$ và $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 1505\pi\right)$

g) Các điểm của đường tròn lượng giác xác định bởi các số: 0; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π; $-\frac{2\pi}{3}$ và $-\frac{\pi}{3}$ là các đỉnh liên tiếp của một lục giác đều.

Hướng dẫn

a) Sai. Chẳng hạn $\alpha = -\frac{7\pi}{4}$ thì $\cos\alpha, \sin\alpha > 0$.

b) Sai. Chẳng hạn $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ thì $\sin\alpha < 0$.

c) Sai. Trên đường tròn lượng giác các điểm biểu diễn các số $\frac{\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{71\pi}{4}$ là trùng nhau, nhưng không trùng với điểm biểu diễn số $\frac{13\pi}{4}$.

d) Đúng. Vì $\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$$-\sin 210^\circ = -\sin(180^\circ + 30^\circ) = -(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

e) Sai. Vì $\sin(\frac{11\pi}{6}) = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin(-\frac{\pi}{6})$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6} + 1505\pi\right) = \sin\left(1506\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin(-\frac{\pi}{6})$$

g) Đúng. Vì chỉ cần dựng lục giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác với một đỉnh là A.

Bài 2. Tìm các điểm của đường tròn lượng giác xác định bởi số α trong mỗi trường hợp sau:

a) $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$; b) $\sqrt{\sin^2\alpha} = \sin\alpha$; c) $\tan\alpha = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$

Hướng dẫn

a) Ta có: $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ suy ra $\cos\alpha \geq 0$ tức là M nằm ở nửa mặt phẳng bên phải trục tung (kể cả trục tung) hay M nằm trên nửa đường tròn lượng giác phía bên phải trục tung (kể cả đầu mút).

b) Ta có: $\sqrt{\sin^2\alpha} = \sin\alpha$ suy ra $\sin\alpha \geq 0$ tức là M nằm ở nửa mặt phẳng bên trên trục hoành (kể cả trục hoành) hay M nằm trên nửa đường tròn lượng giác bên trên trục hoành (kể cả đầu mút).

c) $\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ suy ra $\begin{cases} \sin\alpha \geq 0 \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$

tức là M nằm trên nửa mặt phẳng bên trên trục hoành (kể cả trục hoành) nhưng không nằm trên trục tung $\Leftrightarrow$ M nằm trên nửa đường tròn lượng giác bên trên trục hoành (kể cả đầu mút) nhưng bỏ điểm B(0; 1).

Bài 3. Xác định dấu của các số sau:

a) $\sin 156^\circ$; $\cos(-80^\circ)$; $\tan\left(-\dfrac{17\pi}{8}\right)$ và $\tan 556^\circ$.

b) $\sin(\alpha + \dfrac{\pi}{4})$; $\cos(\alpha - \dfrac{3\pi}{8})$ và $\tan(\alpha - \dfrac{\pi}{2})$ biết $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn

(Học sinh không được dùng máy tính bỏ túi.)

a) Do $0^\circ < 156^\circ < 180^\circ$ nên $\sin 156^\circ > 0$.

Do $-90^\circ < -80^\circ < 90^\circ$ nên $\cos(-80^\circ) > 0$.

Do $\tan\left(-\dfrac{17\pi}{8}\right) = \tan(-2\pi - \dfrac{\pi}{8}) = \tan(-\dfrac{\pi}{8})$

mà $-\dfrac{\pi}{2} < -\dfrac{\pi}{8} < 0$ nên $\tan\left(-\dfrac{17\pi}{8}\right) < 0$.

Do $\tan 556^\circ = \tan(360^\circ + 196^\circ) = \tan 196^\circ$ mà $180^\circ < 196^\circ < 270^\circ$ nên $\tan 556^\circ > 0$.

b) Do $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $0 < \alpha + \dfrac{\pi}{4} < \pi$ nên $\sin(\alpha + \dfrac{\pi}{4}) > 0$

$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha - \dfrac{3\pi}{8} < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos(\alpha - \dfrac{3\pi}{8}) > 0$

$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha - \dfrac{\pi}{2} < 0$ nên $\tan(\alpha - \dfrac{\pi}{2}) < 0$

Bài 4. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau:

a) $-\dfrac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi$; **b)** $k\pi$; **c)** $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$; **d)** $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$.

Hướng dẫn

a) $\cos(-\frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi) = \cos(\frac{2\pi}{3} + k2\pi) = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ tương tự

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan\alpha = -\sqrt{3}$; $\cot\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ với $\alpha = -\frac{\pi}{3} + (2k + 1)\pi$, $k \in Z$.

b) $\cos k\pi = (-1)^k$; $\sin k\pi = 0$; $\tan k\pi = 0$; $\cot k\pi$ không xác định ($k \in Z$).

c) $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$; $\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$; $\tan(\frac{\pi}{2} + k\pi)$ không xác định, $\cot(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$.

d) $\cos(\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan(\frac{\pi}{4} + k\pi) = \cot(\frac{\pi}{4} + k\pi) = 1$.

Bài 5. Tính giá trị lượng giác của góc α trong mỗi trường hợp sau:

a) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\sin\alpha < 0$; **b)** $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, $-\pi < \alpha < 0$.

Hướng dẫn

a) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $\sin\alpha < 0$ thì $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$;

$\tan\alpha = -\sqrt{15}$; $\cot\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$.

b) $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ thì $\cos\alpha < 0$

$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\cot\alpha = 2\sqrt{2}$.

c) $\tan\alpha = \frac{1}{2}$, vì: $-\pi < \alpha < 0$; $\cos\alpha < 0$;

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2$

Bài 6. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\sqrt{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}$;

b) $\frac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{1 + \cos\alpha}$ (giả sử $\sin\alpha \neq 0$);

c) $\dfrac{1-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha$ (giả sử $\cos\alpha\neq 0$).

Giải

a) Ta có:

$$\sqrt{\sin^4\alpha+\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}=\sqrt{\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=\sqrt{\sin^2\alpha}=|\sin\alpha|$$

b) $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}-\dfrac{1}{1+\cos\alpha}$

$$=\frac{1}{1+\cos\alpha}-\frac{1}{1+\cos\alpha}=0\ (\sin\alpha\neq 0)$$

c) $\dfrac{1-\sin^2\alpha.\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

$$=1+\tan^2\alpha-1=\tan^2\alpha.$$

LUYỆN TẬP

Bài 7. Tính các giá trị lượng giác của các góc sau:

$$225^\circ,\ -225^\circ,\ 750^\circ,\ -510^\circ,\ \frac{5\pi}{3},\ \frac{11\pi}{6},\ -\frac{10\pi}{3},\ -\frac{17\pi}{3}$$

Giải

Ta có:

$225^\circ=180^\circ+45^\circ$ nên $\sin225^\circ=\sin(45^\circ+180^\circ)=-\sin45^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos225^\circ=\cos(45^\circ+180^\circ)=-\cos45^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan225^\circ=\cot225^\circ=1$

Đối với các góc còn lại áp dụng các công thức đã nêu và tính tương tự ta có kết quả cần tìm.

Bài 8. Xét góc lượng giác (OA; OM) = α, trong đó M là điểm không nằm trên các trục tọa độ Ox, Oy. Hãy lập bảng dấu của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ theo vị trí của M thuộc góc phần tư I, II, III, IV xác định bởi hệ tọa độ Oxy. Hỏi M trong góc phần tư nào thì:

a) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ cùng dấu? b) $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ khác dấu?

Giải

Bảng dấu của $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$:

Góc phần tư	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−

a) M thuộc góc phần tư thứ I hoặc thứ III thì $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ cùng dấu.

b) M thuộc góc phần tư thứ II hoặc thứ III thì $\sin\alpha$, $\tan\alpha$ khác dấu.

Bài 9. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

b) $1 - \cot^4\alpha = \dfrac{2}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^4\alpha}$ (nếu $\sin\alpha \neq 0$);

c) $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 1 + 2\tan^2\alpha$ (nếu $\sin\alpha \neq \pm 1$).

Hướng dẫn

a) Ta có: $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

b) $1 - \cot^4\alpha = (1 + \cot^2\alpha)(1 - \cot^2\alpha) = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\left(1 - \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$

$= \dfrac{1}{\sin^2\alpha}\left[\dfrac{\sin^2\alpha - (1 - \sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}\right] = \dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin^4\alpha} = \dfrac{2}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\sin^4\alpha}$

c) $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \tan^2\alpha = 1 + 2\tan^2\alpha$.

Bài 10. Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc α.

a) $\sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha}$;

b) $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha)$;

c) $\dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1}$ (nếu $\tan\alpha \neq 1$).

Hướng dẫn

a) $\sqrt{\sin^4\alpha + 4(1 - \sin^2\alpha)} = \sqrt{(2 - \sin^2\alpha)^2} = 2 - \sin^2\alpha$ (do $\sin^2\alpha \leq 1$)

$\sqrt{\cos^4\alpha + 4(1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{(2 - \cos^2\alpha)^2} = 2 - \cos^2\alpha$ (do $\cos^2\alpha \leq 1$)

Vậy $\sqrt{\sin^4\alpha + 4\cos^2\alpha} + \sqrt{\cos^4\alpha + 4\sin^2\alpha} = 4 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 3\ \forall\alpha$

b) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$= 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

và $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Suy ra: $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = 2(1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$

$- 3(1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = 2 - 3 = -1$ không phụ thuộc vào α.

c) $\dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{\cot\alpha + 1}{\cot\alpha - 1} = \dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{\dfrac{1}{\tan\alpha} + 1}{\dfrac{1}{\tan\alpha} - 1}$

$= \dfrac{2}{\tan\alpha - 1} + \dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha} = \dfrac{1 - \tan\alpha}{\tan\alpha - 1} = -1.$

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 11. Cho $\cos x = -\frac{3}{5}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại.

Bài 12. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$;

b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$.

Bài 13. Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào x:

a) $A = \dfrac{(1 - \tan^2 x)^2}{4\tan^2 x} - \dfrac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}$;

b) $B = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$.

Bài 14*. Chứng minh rằng nếu $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ thì:

$$\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) > 5$$

Bài 15*. Cho ΔABC chứng minh rằng nếu:

$$-\cos^2 C - \cos(A + B) \cdot \cos(A - B) - \frac{1}{4} = 0 \text{ thì } \Delta ABC \text{ đều.}$$

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 11. $\sin x = -\frac{4}{5}$; $\tan x = \frac{4}{3}$ và $\cot x = \frac{3}{4}$.

Bài 12. Áp dụng: $(a + b)^2 = 1 - 2ab$;

$(a + b)^3 = 1 - 3ab(a + b)$ với $a + b = 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 13. **a)** $A = -1$; **b)** $B = 1$ (không phụ thuộc x).

Bài 14*. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si và công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 15*.

Ta có: $-\cos^2 C - \cos(A + B)\cos(A - B) - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow$ $4\cos^2 C - 4\cos C\cos(A - B) + 1 = 0$ $(\cos(A + B) = -\cos C)$

$\Leftrightarrow$ $4\cos^2 C - 4\cos C\cos(A - B) + \sin^2(A - B) + \cos^2(A - B) = 0$

$\Leftrightarrow$ $[2\cos C - \cos(A - B)]^2 + \sin^2(A - B) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2\cos C - \cos(A - B) = 0 \\ \sin(A - B) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $A = B = C$ (đpcm).

§3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC (CUNG) CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hai góc đối nhau:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot g\alpha$

2. Hai góc hơn khác nhau π:

$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$

$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

$\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$

$\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$

3. Hai góc bù nhau:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

4. Hai góc phu nhau:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$

$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

a) Khi α đổi dấu (tức thay α bởi $-\alpha$) thì $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$ đổi dấu còn $\tan\alpha$ không đổi dấu;

b) Với mọi α, $\sin\alpha = 2\sin\alpha$;

c) Với mọi α, $\left|\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\alpha + \pi)\right| + \left|\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)\right| = 0$;

d) Nếu $\cos\alpha \neq 0$ thì $\frac{\cos(-5\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{-5\alpha}{\alpha} = -5$;

e) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} = 1$;

f) $\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{5}$.

Hướng dẫn

a) Sai vì khi đổi dấu α, $\cos\alpha$ không đổi dấu còn $\tan\alpha$ đổi dấu.

b) Sai chẳng hạn $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì $2\sin\alpha = 2$ còn $\sin 2\alpha = 0$

c) Đúng vì $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha$, $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$ nên

$$\left|\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\alpha + \pi)\right| = 0$$

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha, \quad \sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$$

nên $$\left|\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)\right| = 0.$$

d) Sai, chẳng hạn với $\alpha = \pi$ thì $\dfrac{\cos(-5\alpha)}{\cos\alpha} = 1$.

e) Đúng vì $\cos\dfrac{3\pi}{8} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8}\right) = \sin\dfrac{\pi}{8}$ nên $\cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8} = 1$.

g) Đúng vì $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{10}\right) = \sin\dfrac{\pi}{10}$.

Bài 2. Tìm mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác giữa các cung α và $\alpha - \dfrac{3\pi}{2}$.

Hướng dẫn

$$\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\cot\alpha \quad (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\alpha \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$$

Bài 3. Tính:

a) $A = \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \ldots + \sin^2 80^\circ$;

b) $B = \cos 10^\circ + \cos 20^\circ + \ldots + \cos 180^\circ$;

c) $C = \cos 315^\circ + \sin 330^\circ + \sin 250^\circ - \cos 160^\circ$.

Hướng dẫn

a) Do $\sin^2 a^\circ + \sin^2(90^\circ - a^\circ) = \sin^2 a^\circ + \cos^2 a^\circ = 1 \Rightarrow A = 4$.

b) Do $\cos a^\circ + \cos(180^\circ - a^\circ) = \cos a^\circ - \cos a^\circ = 0$

$\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \cos 180^\circ = -1$, vậy $B = -1$.

c) Do $\cos 315^\circ = \cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -\dfrac{1}{2}$

$\sin 250^\circ = -\sin 110^\circ = \sin(90^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ$

$\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Bài 4. Dùng bảng tính sin, cosin (hoặc dùng máy tính bỏ túi) để tính giá trị sau (chính xác đến hàng phần nghìn):

$$\cos(-250^\circ);\ \sin 520^\circ \text{ và } \sin\frac{11\pi}{10}.$$

Hướng dẫn

$\cos(-250^\circ) = \cos 250^\circ = \cos(180^\circ + 70^\circ) = -\cos 70^\circ = -\sin 20^\circ \approx -0{,}342$

$\sin 520^\circ = \sin(360^\circ + 160^\circ) = \sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ \approx 0{,}342$

$\sin\dfrac{11\pi}{10} = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{10}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{10} = -\sin 18^\circ \approx -0{,}309.$

Bài 5. Xét hệ tọa độ vuông góc Oxy gắn với đường tròn lượng giác kiểm nghiệm rằng điểm $M\left(-\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ nằm trên đường tròn lượng giác đó. Giả sử điểm M xác định bởi số α. Tìm tọa độ các điểm xác định bởi các số: $\pi - \alpha$; $\pi + \alpha$; $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ và $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$.

Hướng dẫn

Điểm $M\left(-\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$ nằm trên đường tròn lượng giác vì $\left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1$.

M xác định bởi số α thì $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

Suy ra: Tọa độ điểm xác định bởi số $\pi - \alpha$ là $\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

Tọa độ điểm xác định bởi số $\pi + \alpha$ là $\left(\dfrac{4}{5};-\dfrac{3}{5}\right)$.

Tọa độ điểm xác định bởi số $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ là $\left(\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$.

Tọa độ điểm xác định bởi số $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ là $\left(-\dfrac{3}{5};-\dfrac{4}{5}\right)$.

Bài 6. Biết $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, hãy tính giá trị lượng giác của góc có số đo -75°.

Giải

Từ $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ suy ra $\cos^2 15^\circ = \dfrac{1}{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}$,

$\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$; $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

Do $75^\circ = 90^\circ - 15^\circ$ nên $\cos(-75^\circ) = \cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

$$\sin(-75^\circ) = -\sin(90^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan(-75^\circ) = -\cot 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}-2} = -\left(\sqrt{3}+2\right)$$

$$\cot(-75^\circ) = -\tan 15^\circ = \sqrt{3} - 2.$$

LUYỆN TẬP

Bài 7. Hỏi các góc lượng giác có cùng tia đầu và có số đo như sau: 2594°; -646°; -2446° và 74° thì có cùng tia cuối không?

Giải

Ta có: $2594^\circ = 74^\circ + 7.360^\circ$; $-646^\circ = 74^\circ - 2.360^\circ$;

$-2446^\circ = 74^\circ - 7.360^\circ$.

Vậy các góc lượng giác trên có cùng tia cuối.

Bài 8. Xác định dấu của các số sau:

$\cos 250^\circ$; $\tan(-672^\circ)$; $\tan\frac{31\pi}{8}$; $\sin(-1050^\circ)$ và $\cos\frac{16\pi}{5}$.

Giải

* Do $180^\circ < 250^\circ < 270^\circ \Rightarrow \cos 250^\circ < 0$.
* $\tan(-672^\circ) = -\tan 672^\circ = -\tan(-48^\circ + 720^\circ) = \tan 48^\circ > 0$.
* $\tan\frac{31\pi}{8} = \tan\left(-\frac{\pi}{8} + 4\pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\tan\frac{\pi}{8} < 0$.
* $\sin(-1050^\circ) = \sin(30^\circ - 3.360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} > 0$.
* $\cos\frac{16\pi}{5} = \cos\left(\frac{15\pi}{5} + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\frac{\pi}{5} < 0$.

Bài 9. Hãy tính các giá trị lượng giác góc α trong mỗi trường hợp sau:

a) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos\alpha < 0$; **b)** $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Giải

a) Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$

do $\cos\alpha < 0$ nên $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$, $\cot\alpha = -\frac{3}{4}$.

b) Ta có $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{255}{17^2}$; do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên

$$\sin\alpha = \frac{15}{17},\quad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{15}{8},\quad \cot\alpha = -\frac{8}{15}.$$

c) Ta có $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{4}$, do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài 10.

a) Tính $\sin\frac{25\pi}{6} + \cos\frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$

b) Biết $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3}$. Tính:

$\cos(2\pi - \alpha)$; $\tan(\alpha - 7\pi)$ và $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Giải

a) Ta có $\sin\frac{25\pi}{6} + \cos\frac{25\pi}{3} + \tan\left(-\frac{25\pi}{4}\right) =$

$= \sin\left(\frac{24\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{24\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{24\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sin\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 8\pi\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} + 6\pi\right)$

$= \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0.$

b) Ta có: $\sin(\pi + \alpha) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin\alpha = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$

* $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

* $\tan(\alpha - 7\pi) = \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

* $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Bài 11. Chứng minh:

a) $\frac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha}$ (khi biểu thức có nghĩa);

b) $\tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \tan^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$;

c) $2(1 - \sin\alpha)(1 + \cos\alpha) = (1 - \sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

Giải

a) Ta có VT $= \frac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$= \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{-\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} =$ VP

(chia cả tử, mẫu cho $\cos\alpha$) $\Rightarrow$ (đpcm).

b) Ta có $VT = \tan^2\alpha - \sin^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \sin^2\alpha\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)$

$= \tan^2\alpha .\sin^2\alpha = VP \Rightarrow$ (đpcm).

c) Ta có $VP = (1 - \sin\alpha + \cos\alpha)^2$

$= 1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$= 2 - 2\sin\alpha + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$= 2(1 - \sin\alpha) + 2\cos\alpha(1 - \sin\alpha)$

$= 2(1 - \sin\alpha)(1 + \cos\alpha) = VT \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 12. Biết $\sin\alpha - \cos\alpha = m$, hãy tính $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$

Giải

Do $\sin\alpha - \cos\alpha = m$ nên $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = m^2 \Rightarrow 1 - 2\sin\alpha.\cos\alpha = m^2$

$\Rightarrow 2\sin\alpha.\cos\alpha = 1 - m^2 \Rightarrow \sin\alpha.\cos\alpha = \dfrac{1 - m^2}{2}$.

Ta có: $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \sin\alpha.\cos\alpha + \cos^2\alpha)$

$= (\sin\alpha - \cos\alpha)(1 + \sin\alpha.\cos\alpha)$

$= m\left(1 + \dfrac{1 - m^2}{2}\right) = m\left(\dfrac{2 + 1 - m^2}{2}\right) = m\left(\dfrac{3 - m^2}{2}\right)$

Bài 13. Với số α, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, xét điểm M của đường tròn lượng giác xác định bởi số 2α, rồi xét tam giác vuông A'MA (A' đối xứng với A qua tâm O của đường tròn).

a) Tính AM^2 bằng hai cách khác nhau để suy ra $\cos2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

b) Tính diện tích $\Delta A'MA$ bằng hai cách khác nhau để suy ra, $\sin2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

c) Chứng minh rằng: $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, rồi tính các giá trị lượng giác của các góc $\dfrac{3\pi}{8}$ và $\dfrac{5\pi}{8}$.

Giải

a) Áp dụng định lý cosin trong ΔOAM. Ta có:

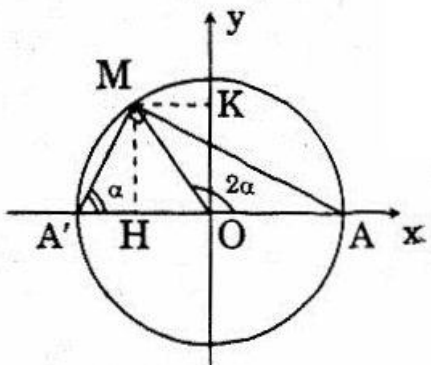
$AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM.OA.\cos2\alpha$

$= 2 - 2.\cos2\alpha$ (1)

Trong tam giác vuông AMA' ta có:

$AM^2 = AA'^2 - A'M^2 = 4OA^2 - A'M^2$

$= 4 - A'M^2$ (2)



Trong $\Delta MA'O$ ta có: $OM^2 = A'M^2 + OA'^2 - 2A'M.OA'\cos\alpha$

$\Rightarrow$ $A'M^2 = 2A'M.\cos\alpha \Rightarrow A'M = 2\cos\alpha$ (3)

Thay (3) vào (2) ta có: $AM^2 = 4 - 4\cos^2\alpha$ (4)

Từ (1) và (4) ta có:

$$2 - 2\cos 2\alpha = 4 - 4\cos^2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \quad (5)$$

b) Ta có $S_{A'MA} = \frac{1}{2}MH.AA' = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.2OA = OA.\sin 2\alpha$ (6)

Mặt khác: $S_{A'MA} = \frac{1}{2}MA'.AA'.\sin\alpha = MA'\sin\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$ (do (3)) (7)

Từ (6) và (7) $\Rightarrow \sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$.

c) Áp dụng (5) ta có: $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$,

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

* $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{8} =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}\right),$$

từ đó suy ra $\cos\frac{3\pi}{8}$, $\tan\frac{3\pi}{8}$, $\cot\frac{3\pi}{8}$.

* Đối với cung $\frac{5\pi}{8}$ (tương tự như trên).

Bài 14. Trong hệ tọa độ vuông góc Oxy, cho điểm P(2; –3)

a) Chứng tỏ rằng điểm M sao cho $\vec{OM} = \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|}$ là giao điểm của tia OP với đường tròn lượng giác gắn với hệ tọa độ đó.

b) Tính tọa độ của điểm M từ đó suy ra cosin, sin của góc lượng giác (Ox, OP).

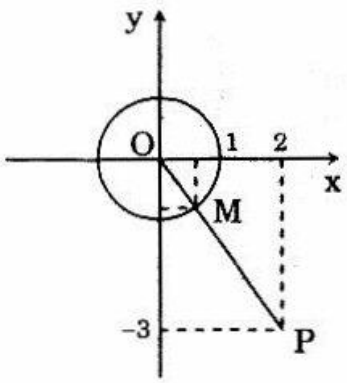
Giải

a) Gọi $M(x_0; y_0)$ thì ta có $\vec{OM}(x_0; y_0)$

Từ giả thiết đã cho ta có:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{OP}.2 = \frac{2}{\sqrt{13}} \\ y_0 = \frac{1}{OP}.(-3) = -\frac{3}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.



Đường tròn lượng giác đối với Oxy có phương trình: $x^2 + y^2 = 1$, dễ thấy tọa độ M thỏa mãn phương trình đường tròn nên ta có (đpcm).

b) Đáp số: $\cos(Ox, OP) = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin(Ox, OP) = -\frac{3}{\sqrt{13}}$.

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 15. Tính giá trị biểu thức sau: $A = \cos 120^\circ + \tan 300^\circ + 2\sin(-780^\circ)$.

Bài 16. Rút gọn: $B = \frac{1}{\tan 368^\circ} + \frac{2\sin 50^\circ . \cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ + \cos 98^\circ}$.

Bài 17. Tính $C = \sin 160^\circ \cos 110^\circ + \sin 250^\circ : \cos 340^\circ + \tan 110^\circ : \tan 340^\circ$.

Bài 18. Rút gọn biểu thức sau:

$$D = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(\pi - x) + \frac{1}{2}\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{1}{2}\sin(-x)\sin(2\pi - x).$$

Bài 19*. Cho x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = \pi$; $x, y, z > 0$.

Tính x, y, z nếu: $\sin^2 x + \sin^2 y - \sin^2 z + \sqrt{3}(\cos x + \cos y + \sin z) = \frac{17}{4}$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 15. $A = -2\sqrt{3} - \frac{1}{2}$.

Bài 16. $B = 0$.

Bài 17. $C = 0$.

Bài 18. $D = 1$.

Bài 19*.

Ta có: $\sin^2 x + \sin^2 y - \sin^2 z + \sqrt{3}(\cos x + \cos y + \sin z) = \frac{17}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sin z - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin z = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ y = \frac{\pi}{6} \\ z = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

(Do $x + y + z = \pi$ và $x, y, z > 0$).

§4. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức cộng $\forall \alpha, \beta$ ta có:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha.\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta}$$

2. Công thức nhân đôi:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha;$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

3. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

4. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\cos u + \cos v = 2.\cos\frac{u + v}{2}.\cos\frac{u - v}{2}$$
$$\cos u - \cos v = -2.\sin\frac{u + v}{2}.\sin\frac{u - v}{2}$$
$$\sin u + \sin v = 2.\sin\frac{u + v}{2}.\cos\frac{u - v}{2}$$
$$\sin u - \sin v = 2.\cos\frac{u + v}{2}.\sin\frac{u - v}{2}$$

5. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos x.\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$
$$\sin x.\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$
$$\sin x.\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Hỏi mỗi khẳng định sau có đúng không? $\forall\alpha$, $\forall\beta$ ta có:

a) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha + \cos\beta$;

b) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha - \sin\beta$;

c) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha .\cos\beta + \cos\alpha .\sin\beta$;

d) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha .\cos\beta - \sin\alpha .\sin\beta$;

e) $\dfrac{\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan 2\alpha$;

g) $\sin^2 \alpha = \sin 2\alpha$.

Hướng dẫn

a) Sai, vì chẳng hạn với $\beta = 0$, hai vế đẳng thức đó trở thành $\cos\alpha$ và $\cos\alpha + 1$.

b) Sai, vì chẳng hạn $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\beta = -\dfrac{\pi}{2}$, hai vế trở thành 0 và 2.

c) Đúng.

d) Sai, vì chẳng hạn với $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4}$, hai vế trở thành 0 và 1.

e) Sai, vì chẳng hạn với $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$, hai vế đẳng thức trở thành $\sqrt{2}$ và 1.

g) Sai, vì chẳng hạn với $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, hai vế đẳng thức đó trở thành 1 và 0.

Bài 2. a) Viết $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, hãy tính giá trị lượng giác của góc 75°.

b) Viết $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$, hãy tính giá trị lượng giác của góc 15°.

Hướng dẫn

a) $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ.\cos 30^\circ - \sin 45^\circ.\sin 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ.\cos 30^\circ + \cos 45^\circ.\sin 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$

$\tan 75^\circ = \dfrac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$; $\cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$.

b) $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ.\cos 30^\circ + \sin 45^\circ.\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$

$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ.\cos 30^\circ - \cos 45^\circ.\sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

$\tan 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$; $\cot 15^\circ = 2 + \sqrt{3}$.

Bài 3. Chứng minh rằng:

a) $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$; b) $\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}.\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

c) $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$;

d) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$.

Hướng dẫn

Chú ý $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\tan\frac{\pi}{4}=1 \Rightarrow$ (đpcm).

Bài 4. a) Biết $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ và $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ hãy tính giá trị lượng giác của góc 2α và $\frac{\alpha}{2}$.

b) Sử dụng $15^\circ=\frac{30^\circ}{2}$. Hãy kiểm nghiệm lại kết quả bài tập 39.

Hướng dẫn

a) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ và $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nên $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ từ đó

$\sin2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$; $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{9}$; $\tan2\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

Do $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nên $\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ vậy $\cos\frac{\alpha}{2}>0, \sin\frac{\alpha}{2}>0$

Từ công thức $2.\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}}$,

và từ công thức $2.\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$, suy ra $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$,

từ đó: $\tan\frac{\alpha}{2}=3+2\sqrt{2}$, $\cot\frac{\alpha}{2}=3-2\sqrt{2}$.

b) Ta có : $\cos15^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos30^\circ}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$, từ đó ta có

$\sin15^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$; $\tan15^\circ=2-\sqrt{3}$; $\cot15^\circ=2+\sqrt{3}$

Bài 5. Chứng minh rằng:

a) $\sin\frac{11\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)$;

b) $\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}=-\frac{1}{8}$. $\left(\text{HD : Nhân hai vế với } \sin\frac{\pi}{7}\right)$;

c) $\sin6^\circ.\sin42^\circ.\sin66^\circ.\sin78^\circ=\frac{1}{16}$, (Nhân hai vế với $\cos6^\circ$);

Hướng dẫn

a) $\sin\frac{11\pi}{12}.\cos\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right).\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{3}\right).$

b) Để ý rằng $\cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\frac{2\pi}{7}$, $\sin\frac{\pi}{7} = -\sin\frac{8\pi}{7}$

ta có: $\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}$

$= \frac{1}{8}.\sin\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{8}.\sin\frac{\pi}{7}.$

Từ đó: $\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{3\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8}.$

c) Để ý rằng $\sin42^\circ = \cos48^\circ$, $\sin66^\circ = \cos24^\circ$, $\sin78^\circ = \cos12^\circ$.

Ta có: $\cos6^\circ.\sin6^\circ.\sin42^\circ.\sin66^\circ.\sin78^\circ =$

$= \sin6^\circ.\cos6^\circ.\cos12^\circ.\cos24^\circ.\cos48^\circ$

$= \frac{1}{16}\sin96^\circ = \frac{1}{16}\cos6^\circ$

$\Rightarrow \quad \sin6^\circ.\sin42^\circ.\sin66^\circ.\sin78^\circ = \frac{1}{16}.$

Bài 6. Dùng công thức biến đổi tích thành tổng chứng minh rằng:

a) $\cos75^\circ.\cos15^\circ = \sin75^\circ.\sin15^\circ = \frac{1}{4}$;

b) $\cos75^\circ.\sin15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$;

c) $\sin75^\circ.\cos15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$;

d) $\cos\alpha.\sin(\beta-\gamma) + \cos\beta.\sin(\gamma-\alpha) + \cos\gamma.\sin(\alpha-\beta) = 0,\ \forall\alpha, \beta, \gamma.$

Giải

a) Ta có: $\cos75^\circ.\cos15^\circ = \frac{1}{2}[\cos(75^\circ - 15^\circ) + \cos(75^\circ + 15^\circ)]$

$= \frac{1}{2}(\cos60^\circ + \cos90^\circ) = \frac{1}{4}$ (1)

$\sin75^\circ.\sin15^\circ = \frac{1}{2}[\cos(75^\circ - 15^\circ) - \cos(75^\circ + 15^\circ)]$

$= \frac{1}{2}(\cos60^\circ - \cos90^\circ) = \frac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (đpcm).

b) Ta có:

$$\cos 75^\circ . \sin 15^\circ = \sin 15^\circ . \cos 75^\circ = \frac{1}{2}[\sin(15^\circ - 75^\circ) + \sin(15^\circ + 75^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}(\sin(-60^\circ) + \sin 90^\circ) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

c) Ta có: $\sin 75^\circ . \cos 15^\circ = \frac{1}{2}[\sin(75^\circ - 15^\circ) + \sin(75^\circ + 15^\circ)]$

$$= \frac{1}{2}(\sin 60^\circ + \sin 90^\circ) = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}. \text{ (đpcm).}$$

d) Ta có:

$$\cos\alpha.\sin(\beta - \gamma) + \cos\beta.\sin(\gamma - \alpha) + \cos\gamma.\sin(\alpha - \beta) =$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(\beta - \gamma - \alpha) + \sin(\beta - \gamma + \alpha) + \sin(\gamma - \alpha - \beta) +$$

$$+ \sin(\gamma - \alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta - \gamma) + \sin(\alpha - \beta + \gamma)]$$

$$= \frac{1}{2}[\sin(\beta - \gamma - \alpha) + \sin(\beta + \alpha - \gamma) - \sin(\alpha + \beta - \gamma) -$$

$$- \sin(\alpha - \gamma - \beta) + \sin(-\beta + \alpha - \gamma) - \sin(\beta - \alpha - \gamma)] = 0 \text{ (đpcm).}$$

Bài 7. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; **b)** $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Giải

a) Ta có:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \sin\alpha.$$

b) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2}\cos 2\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin 2\alpha - \sin 2\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-2\sin 2\alpha) = -\sin 2\alpha.$$

Bài 8. Chứng minh rằng:

a) $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = -\sqrt{3}$, nếu $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ và $\cos\alpha \neq \cos\beta$.

b) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin\alpha} = \tan 4\alpha$, (khi các biểu thức có nghĩa).

Giải

a) Ta có: $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta} = \dfrac{2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}.\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = -\dfrac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$

$$= -\frac{\cos\dfrac{\pi}{6}}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = -\sqrt{3} \text{ (đpcm).}$$

b) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 7\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{-2\sin\dfrac{\alpha+7\alpha}{2}.\sin\dfrac{\alpha-7\alpha}{2}}{2\cos\dfrac{7\alpha+\alpha}{2}.\sin\dfrac{7\alpha-\alpha}{2}}$

$$= \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \tan 4\alpha \text{ (đpcm).}$$

LUYỆN TẬP

Bài 9. Chứng minh rằng:

a) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

b) $\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) = \dfrac{1}{4}\sin 3\alpha$;

c) $\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) = \dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$.

Hướng dẫn

a) * $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha.\cos\alpha + \cos 2\alpha.\sin\alpha$

$= 2\sin\alpha.\cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\cos\alpha$

$= 2\sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sin\alpha = 2\sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \sin\alpha$

$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

* $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha.\cos\alpha - \sin 2\alpha.\sin\alpha$

$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin^2\alpha.\cos\alpha$

$= -\cos\alpha + 2\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= -\cos\alpha + 2\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

b) $\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right) = \sin\alpha\left(\sin^2\dfrac{\pi}{3}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$= \sin\alpha\left(\frac{3}{4}\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)$$

$$= \frac{\sin\alpha}{4}\left(3 - 4\sin^2\alpha\right) = \frac{1}{4}\left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha.$$

c) $\cos\alpha.\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right) = \cos\alpha\left(\cos^2\frac{\pi}{3}\cos^2\alpha - \sin^2\frac{\pi}{3}\sin^2\alpha\right)$

$= \cos\alpha\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right)$

$= \frac{\cos\alpha}{4}\left[\cos^2\alpha - 3(1-\cos^2\alpha)\right]$

$= \frac{\cos\alpha}{4}\left(4\cos^2\alpha - 3\right) = \frac{1}{4}\cos 3\alpha$

Ứng dụng: $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ = \sin 20^\circ\sin(60^\circ - 20^\circ)\sin(60^\circ + 20^\circ)$

$= \frac{1}{4}\sin(3.20^\circ) = \frac{1}{4}\sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Bài 10. Chứng minh rồi dùng máy tính bỏ túi hoặc bàng số để kiểm nghiệm lại gần đúng kết quả.

a) $\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ = \sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$;

b) $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ = \cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

Giải

a) Ta có: $\cos 10^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ = \cos 10^\circ\cos(60^\circ - 10^\circ)\cos(60^\circ + 10^\circ)$

$= \cos 10^\circ(\cos^2 60^\circ\cos^2 10^\circ - \sin^2 60^\circ\sin^2 10^\circ)$

$= \cos 10^\circ\left(\frac{1}{4}\cos^2 10^\circ - \frac{3}{4}\sin^2 10^\circ\right) = \frac{1}{4}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ (1)

Mặt khác:

$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ = \sin 20^\circ\sin(60^\circ - 20^\circ)\sin(60^\circ + 20^\circ)$

$= \frac{1}{4}\sin(3.20^\circ) = \frac{1}{4}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$ (2) (theo bài 9)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (đpcm).

b) Tương tự câu a).

Bài 11. Chứng minh rằng: $A = \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

Giải

Ta có: $A.\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{6\pi}{7}$

$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}\right)\right]$

$+ \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{7}-\frac{6\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[-\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7} + \sin\pi\right] = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7}$$

Vậy $A.\sin\frac{\pi}{7} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{7} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$ (đpcm).

Bài 12. Chứng minh rằng giá trị của mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $\cos^2(\alpha + x) + \cos^2 x - 2\cos\alpha.\cos x.\cos(\alpha + x)$;

b) $\sin 4x.\sin 10x - \sin 11x.\sin 3x - \sin 7x.\sin x$.

Giải

a) Ta có:

$\cos^2(\alpha + x) + \cos^2 x - 2\cos\alpha.\cos x.\cos(\alpha + x)$

$= \cos(\alpha + x)[\cos(\alpha + x) - 2\cos\alpha.\cos x] + \cos^2 x$

$= \cos(\alpha + x)[\cos\alpha.\cos x - \sin\alpha.\sin x - 2\cos\alpha.\cos x] + \cos^2 x$

$= \cos(\alpha + x)[-\sin\alpha.\sin x - \cos\alpha.\cos x] + \cos^2 x$

$= -\cos(\alpha + x).\cos(\alpha - x) + \cos^2 x$

$= -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + x - \alpha + x) + \cos(\alpha + x + \alpha - x)] + \cos^2\alpha$

$= -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \cos^2 x = -\frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \cos^2 x$

$= -\cos^2 x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

(không phụ thuộc x)

b) $\sin 4x.\sin 10x - \sin 11x.\sin 3x - \sin 7x.\sin x$

$= \frac{1}{2}[\cos 6x - \cos 14x] - \frac{1}{2}[\cos 8x - \cos 14x] - \frac{1}{2}[\cos 6x - \cos 8x]$

$= \frac{1}{2}[\cos 6x - \cos 14x - \cos 8x + \cos 14x - \cos 6x + \cos 8x] = 0$

(không phụ thuộc x)

Bài 13. Chứng minh rằng nếu ΔABC có 3 góc thỏa:

a) $\sin A = \cos B + \cos C$ thì Δ ABC vuông;

b) $\sin A = 2\sin B.\cos C$ thì Δ ABC vuông cân.

Giải

a) Ta có: $\sin A = \cos B + \cos C \Leftrightarrow \sin A = 2\cos\frac{B + C}{2}.\cos\frac{B - C}{2}$

$\Leftrightarrow \sin A = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right)\cos\frac{B - C}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B - C}{2} \Leftrightarrow \cos\frac{A}{2} = \cos\frac{B - C}{2}$

(do $\sin\frac{A}{2} > 0$)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{A}{2} = \pm\frac{B-C}{2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A = B - C \\ A = C - B \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \pi - B = B \\ \pi - C = C \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B = \frac{\pi}{2} \\ C = \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ (đpcm).

b) Ta có: $\sin A = 2\sin B.\cos C \Leftrightarrow \sin(B + C) - 2\sin B.\cos C = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin B.\cos C - \cos B.\sin C - 2\sin B.\cos C = 0$

$\Leftrightarrow \quad \sin(B - C) = 0$

$\Leftrightarrow \quad B = C$ (ΔABC cân tại A) $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 14. Chứng minh rằng nếu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ thì:

a) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}$;

b) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2}$;

c) $\sin2\alpha + \sin2\beta + \sin2\gamma = 4\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$;

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$.

Giải

a) Ta có: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\gamma$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right).\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2} \text{ (đpcm).}$$

b) Ta có: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$

$$= 2\sin\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2} \text{ (đpcm).}$$

c) Ta có: $\sin2\alpha + \sin2\beta + \sin2\gamma = 2\sin(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) + 2\sin\gamma.\cos\gamma$

$= 2\sin\gamma.\cos(\alpha-\beta) + 2\sin\gamma.\cos\gamma = 2\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta) + \cos\gamma]$

$= 2\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] = 4\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma$ (đpcm).

d) Ta có: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1+\cos2\alpha}{2} + \frac{1+\cos2\beta}{2} + \cos^2\gamma$

$= 1 + \frac{1}{2}[\cos 2\alpha + \cos 2\beta] + \cos^2\gamma = 1 + \cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\gamma$

$= 1 - \cos\gamma.\cos(\alpha-\beta) + \cos^2\alpha = 1 - \cos\gamma[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$= 1 - 2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$ (đpcm).

Bài 15. a) Chứng minh rằng nếu: α và β khác $\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ thì:

$$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}; \quad \tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

b) Chứng minh rằng với α mà $\cos\alpha \neq 0$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ và $\sin\alpha \neq 0$ thì:

$$\frac{1}{\cos\alpha.\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha.\cos 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\cos 7\alpha.\cos 8\alpha} = \frac{\tan 8\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}$$

Giaûi

a) Ta có: $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta}$

$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$ với $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$ (đpcm).

* Chứng minh: $\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$ (tương tự trên).

b) Ta có: $\frac{1}{\cos\alpha.\cos 2\alpha} + \frac{1}{\cos 2\alpha.\cos 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\cos 7\alpha.\cos 8\alpha} =$

$= \frac{\tan\alpha - \tan 2\alpha}{\sin(-\alpha)} + \frac{\tan 2\alpha - \tan 3\alpha}{\sin(-\alpha)} + \ldots + \frac{\tan 7\alpha - \tan 8\alpha}{\sin(-\alpha)}$

$= \frac{1}{\sin\alpha}[-\tan\alpha + \tan 2\alpha - \tan 2\alpha + \tan 3\alpha + \ldots - \tan 7\alpha + \tan 8\alpha]$

$= \frac{\tan 8\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha}$ (đpcm).

Bài 16. Biết $\cos\alpha + \cos\beta = a$, $\sin\alpha + \sin\beta = b$ (a, b là hằng số và $a^2 + b^2 \neq 0$).

Hãy tính $\sin(\alpha+\beta)$ theo a và b.

Giải

Từ giả thiết ta có:

$$(I): \begin{cases}\cos\alpha + \cos\beta = a \\ \sin\alpha + \sin\beta = b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\cos^2\alpha + 2\cos\alpha.\cos\beta + \cos^2\beta = a^2 \\ \sin^2\alpha + 2\sin\alpha.\sin\beta + \sin^2\beta = b^2\end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha + 2\cos\alpha.\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha.\sin\beta + \sin^2\beta = b^2 + a^2$

$\Rightarrow \quad 2 + 2\cos(\alpha-\beta) = a^2 + b^2 \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$ (1)

Mặc khác từ (I) $\Rightarrow (\cos\alpha + \cos\beta)(\sin\alpha + \sin\beta) = a.b$

$\Leftrightarrow \quad \sin\alpha.\cos\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin\beta.\cos\beta = a.b$

$\Leftrightarrow$ $(\sin\alpha.\cos\alpha + \sin\beta.\cos\beta) + \sin(\alpha + \beta) = a.b$

$\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta) + \sin(\alpha + \beta) = ab$

$\Leftrightarrow$ $\sin(\alpha + \beta)[1 + \cos(\alpha - \beta)] = a.b$ (2)

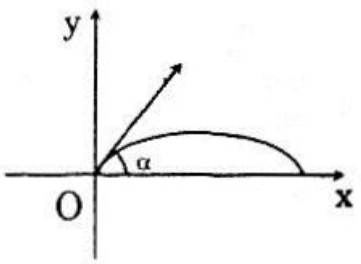
Từ (1) và (2) ta có:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{a.b}{1 + \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}} = \frac{2a.b}{a^2 + b^2} \quad (a^2 + b^2 \neq 0).$$

Bài 17. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O, với vận tốc ban đầu là v(m/s) theo phương hợp với trục hoành (nằm ngang) Ox một góc α, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là parabol có phương trình: $y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x$,

($g \approx 9{,}8$ m/s^2), (giả sử lực cản của không khí là không đáng kể).

Gọi tầm xa của quỹ đạo là khoảng cách từ O đến giao điểm khác O của quỹ đạo với Ox.



a) Tính tầm xa theo α (và v).

b) Khi v không đổi, α thay đổi trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, hỏi giá trị α nào thì tầm xa của quỹ đạo đạt giá trị lớn nhất? Tính giá trị đó theo v. Ví dụ: v = 80m/s.

Hướng dẫn

a) Gọi x là tầm xa của quỹ đạo thì $x > 0$ và $-\frac{g x^2}{2v^2\cos^2\alpha} + (\tan\alpha)x = 0$

tức là: $x = \frac{2v^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}$

b) x đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\sin 2\alpha = 1$ tức là $\alpha = \frac{\pi}{4}$, khi đó:

$$x = \frac{v^2}{g} \text{ với } v = 80\text{m/s thì } x = \frac{v^2}{g} = \frac{80^2}{9{,}8} \approx 653 \text{ (m)}$$

(Đây là một bài tập gắn với thực tiễn học sinh thường quan sát).

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 18. a) Cho biết $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$ tính $A = \cos(a + b).\cos(a - b)$.

b) Tính $B = \tan x.\tan y$ biết $\frac{\cos(x + y)}{\cos(x - y)} = \frac{1}{2}$ (với điều kiện các biểu thức có nghĩa).

Bài 19. Chứng minh rằng: $\forall x$ ta có:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4x$$

Bài 20. Cho $\tan\frac{b}{2} = 4\tan\frac{a}{2}$. Chứng minh rằng: $\tan\frac{b-a}{2} = \frac{3\sin a}{5 - 3\cos a}$.

Bài 21. Cho cosx + cosy + cosz = 0.

Chứng minh rằng: $\cos x.\cos y.\cos z = \frac{1}{12}(\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z)$

Bài 22. Cho sin(x + 2y) = 2sinx. Chứng minh rằng: tan(x + y) = 3tany (với giả thiết các biểu thức có nghĩa)

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 18. **a)** $A = -\frac{119}{144}$; **b)** $B = \frac{1}{3}$.

Bài 19. Áp dụng công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, góc nhân đôi, công thức hạ bậc $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 20. Đặt $\tan\frac{a}{2} = t$, $\tan\frac{b}{2} = 4t$, biến đổi hai vế $\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 21. Áp dụng:

$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3ab(a + b) - 3bc(b + c) - 3ac(a + c) - 6abc.$

Bài 22. Ta có:

sin(x + 2y) = 2sinx

$\Leftrightarrow$ sin[(x + y) + y] = 2sin[(x + y) - y]

$\Leftrightarrow$ 3tany = tan(x + y) (đpcm).

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG VI

I. TÓM TẮT TY THUYẾT

1. Góc và cung lượng giác
   * Đơn vị đo cung và góc, cách đổi từ đơn vị này ra đơn vị khác.
   * Góc và cung lượng giác, số đo của góc và cung lượng giác.
   * Hệ thức sa-lơ.
2. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác
   * Đường tròn lượng giác.
   * Giá trị lượng giác sin, cosin, tan và cot. Và các tính chất suy ra từ định nghĩa.
3. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt.
   * Hai góc đối nhau (α và $-\alpha$).
   * Hai góc hơn kém nhau π (π và $\pi + \alpha$).

* Hai góc bù nhau ($\pi - \alpha$ và α).
* Hai góc phụ nhau $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \text{ và } \alpha\right)$.

4. Một số công thức lượng giác
   * Công thức cộng.
   * Công thức nhân đôi.
   * Công thức biến đổi tổng thành tích.
   * Công thức biến đổi tích thành tổng.

II. BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Hỏi các đẳng thức sau có đúng với mọi số nguyên k không?

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$; **b)** $\cos(k\pi) = (-1)^k$;

c) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) = (-1)^k$; **d)** $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn

a) Đúng, thử với k chẵn và k lẻ;

b) Đúng, thử với k = 0, 1, 2, 3;

c) Đúng, thử với k chẵn và k lẻ;

d) Sai, khi k = 1, VT = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, VP = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 2. Tính:

a) $\sin\alpha$, $\cos2\alpha$, $\sin2\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ và $\sin\frac{\alpha}{2}$; biết $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$;

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, biết $\cos\alpha = -\frac{9}{11}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

c) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, biết $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$;

d) $\cos(\alpha - \beta)$, biết $\sin\alpha - \sin\beta = \frac{1}{3}$ và $\cos\alpha - \cos\beta = \frac{1}{2}$;

e) $\sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\frac{5\pi}{16}.\sin\frac{7\pi}{16}$.

Hướng dẫn

a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ thì $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$

$\sin2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha = -\frac{24}{25}$; $\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{7}{25}$;

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = -\frac{\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{10}$.

b) $\tan\alpha > 0$ nên $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \dfrac{2\sqrt{10}}{9}$;

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \frac{121 - 36\sqrt{10}}{41}.$$

c) $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)$

$$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}.$$

d) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{9}$ (1)

$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{4}$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2) ta được:

$$1 + 1 - 2(\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta) = \frac{13}{26} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \frac{59}{72}.$$

e) $\sin\dfrac{\pi}{16}.\sin\dfrac{3\pi}{16}.\sin\dfrac{5\pi}{16}.\sin\dfrac{7\pi}{16} =$

$$= \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{16}\right).\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{16}.\sin\frac{3\pi}{16}.\cos\frac{3\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{16} = \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}\right).\left(\frac{1}{2}\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{16}.$$

Bài 3. Chứng minh rằng:

a) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos 2\alpha$;

b) $\sin\alpha(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha$;

c) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha$; (khi các biểu thức có nghĩa);

d) $\tan\alpha - \dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{2}{\tan 2\alpha}$; (khi các biểu thức có nghĩa).

Hướng dẫn

a) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos + \sin\alpha).\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)\right]$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$

b) $\sin\alpha(1 + \cos 2\alpha) = \sin\alpha(1 + 2\cos^2\alpha - 1)$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha = \sin 2\alpha.\cos\alpha.$$

c) $\dfrac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha+(1-\cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha+(1+\cos 2\alpha)}=\dfrac{\sin 2\alpha+2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{2\sin\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\tan\alpha.$

d) $\tan\alpha-\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{\tan^2\alpha-1}{2\tan\alpha}.2=-\dfrac{2}{\tan 2\alpha}.$

Bài 4.

a) Chứng minh rằng: $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma$;
biết $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ và $\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma\neq 0$.

b) Chứng minh rằng:
$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$; biết $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ và $\tan\alpha=\dfrac{1}{8}$, $\tan\beta=\dfrac{1}{5}$, $\tan\gamma=\dfrac{1}{2}$;

c) Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=4.$

Hướng dẫn

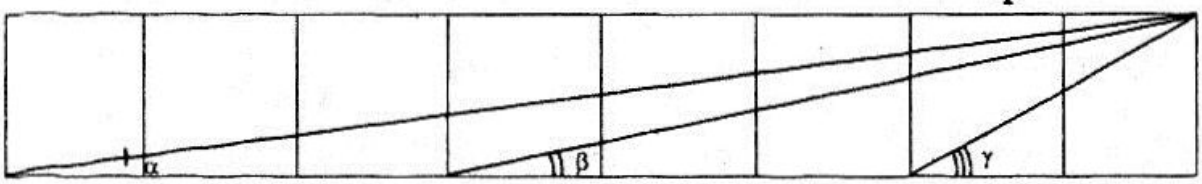
a) $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\tan(k\pi)=0\Rightarrow\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha.\tan\beta}+\tan\gamma=0$ (Để ý rằng $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$ do $\cos\gamma\neq 0$)

$\Leftrightarrow\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma$ (đpcm).

b) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{1}{8}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{8}.\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{3}$; $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{2}}=1.$

Nhận xét: Có thể chuyển câu b) thành một bài toán hình học như sau:
Chứng minh rằng tổng các góc trong hình dưới đây bằng $\dfrac{\pi}{4}$.



c) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}=\dfrac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ.\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{2\left(\cos 60^\circ\cos 10^\circ-\sin 60^\circ\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$

$=\dfrac{2\cos(60^\circ+10^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}=4\dfrac{\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ}=4\dfrac{\cos 70^\circ}{\cos 70^\circ}=4.$

Bài 5. Chứng minh rằng với $\forall \alpha, \beta, \gamma$ ta có:

$\cos(\alpha + \beta).\sin(\alpha - \beta) + \cos(\beta + \gamma).\sin(\beta - \gamma) + \cos(\gamma + \alpha).\sin(\gamma - \alpha) = 0$

Giải

Ta có:

$\cos(\alpha + \beta).\sin(\alpha - \beta) + \cos(\beta + \gamma).\sin(\beta - \gamma) + \cos(\gamma + \alpha).\sin(\gamma - \alpha) =$

$= \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta - \alpha - \beta) + \sin(\alpha - \beta + \alpha + \beta) + \sin(\beta - \gamma - \beta - \gamma) +$

$+ \sin(\beta - \gamma + \beta + \gamma) + \sin(\gamma - \alpha - \gamma - \alpha) + \sin(\gamma - \alpha + \gamma + \alpha)]$

$= \frac{1}{2}[-\sin 2\beta + \sin 2\alpha - \sin 2\gamma + \sin 2\beta - \sin 2\alpha + \sin 2\gamma] = 0$ (đpcm)

III. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ VÀ NÂNG CAO

Bài 6. Tính: $A = \frac{\sin 110^\circ}{\cos 110^\circ} + \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$.

Bài 7. Tính: **a)** $\cos 165^\circ$; **b)** $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ$.

Bài 8. Cho $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng:

$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x.\tan y.\tan z$.

Bài 9*. Cho $0^\circ < x \leq 45^\circ$. Chứng minh rằng: $\cot x = \cot 2x + \sqrt{1 + \cot^2 2x}$

Áp dụng Chứng minh rằng:

$4\cos 36^\circ + \cot 7^\circ 30' = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6}$.

Bài 10*. Chứng minh rằng: $8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ = 1$.

IV. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 6. Đáp số: $A = 0$

Bài 7. a) $\cos 165^\circ = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$; **b)** $\cos 20^\circ.\cos 40^\circ.\cos 80^\circ = \frac{1}{8}$.

Bài 8. Từ giả thiết $\Rightarrow x + y = -z \Rightarrow \tan(x + y) = -\tan z$ biến đổi $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 9*. Ta có: $1 + \cot^2 2x = \frac{1}{\sin^2 2x} \Rightarrow \sqrt{1 + \cot^2 2x} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 2x}}$

Lại vì $x \in (0^\circ; 45^\circ] \Rightarrow \sin 2x > 0$. Vậy đẳng thức cần chứng minh có:

$VP = \cot 2x + \frac{1}{\sin 2x} = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x} = \cot x$ (đpcm)

Áp dụng đẳng thức đã cho với $x = 15^\circ$; $x = 7^\circ 30'$

và lưu ý $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} \Rightarrow$ (đpcm)

Bài 10*.

Cách 1: Từ $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ$. Áp dụng công thức lượng giác $\Rightarrow$ (đpcm)

Cách 2: Ta tính được $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ từ đó $\Rightarrow$ (đpcm).

V. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Nếu $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2\alpha$ bằng

(A) $\frac{3}{8}$; (B) $-\frac{3}{4}$; (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; (D) $\frac{3}{4}$

Câu 2. Với mọi α, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ bằng:

(A) $\sin\alpha$; (B) $-\sin\alpha$; (C) $-\cos\alpha$; (D) $\cos\alpha$.

Câu 3. $\dfrac{\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{10} + \sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{15}}{\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{15}\sin\frac{\pi}{5}}$ bằng:

(A) $\sqrt{3}$ (B) 1; (C) -1; (D) $\frac{1}{2}$.

Câu 4. $\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$ bằng:

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; (C) $\frac{1}{2}$; (D) $-\frac{1}{4}$.

Câu 5. $\sin\frac{90^\circ}{4}\cos\frac{270^\circ}{4}$ bằng:

(A) $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (B) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)$; (C) $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (D) $\sqrt{2} - 1$.

Câu 6. $\dfrac{\cos 80^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 40^\circ}$ bằng:

(A) 1; (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (C) -1; (D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α mà $\widehat{uOv}$ là góc nhọn thì:

(A) $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$; (B) $-\frac{\pi}{2} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$; (C) $-\frac{\pi}{2} \le \alpha < 0$

(D) Có $k \in Z$ để $-\frac{\pi}{2} + k2\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 8. Góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo α mà $\widehat{uOv}$ là góc tù thì:

(A) Có số nguyên k để $\frac{\pi}{2} + k2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + k2\pi$.

(B) $-\pi \le \alpha < -\frac{\pi}{2}$; (C) $-\frac{\pi}{2} < \alpha \le \frac{3\pi}{2}$; (D) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Câu 9. Với góc lượng giác (OA, OM) có số đo α, xét góc lượng giác (OA, ON) có số đo $\frac{\alpha}{2}$ (M và N cùng nằm trên đường tròn lượng giác gốc A). Khi đó, với mọi α sao cho M nằm trong góc phần tư thứ III của hệ tọa độ gắn với đường tròn đó (M không nằm trên trục tọa độ), điểm N luôn:

(A): Nằm trong góc phần tư I;

(B): Nằm trong góc phần tư II;

(C): Nằm trong góc phần tư III;

(D): Không nằm trong góc phần tư I và III.

Câu 10. Với góc lượng giác (OA, OM) có số đo α, xét góc lượng giác (OA, ON) có số đo 2α (M và N cùng nằm trên đường tròn lượng giác gốc A). Khi đó, với mọi α sao cho M nằm trong góc phần tư I của hệ tọa độ gắn với đường tròn đó (M không nằm trên trục tọa độ), điểm N luôn:

(A): Nằm trong góc phần tư I;

(B): Nằm trong góc phần tư II;

(C): Nằm trong góc phần tư III;

(D): Không nằm trong góc phần tư IV.

VI. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Phương án chọn	B	C	B	D	A	C	D	A	D	D

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài 1. Cho các tập con của tập số thực $\mathbb{R}$: $A = [-1; 1]$, $B = [a; b)$ và $C = (-\infty; c]$, trong đó a, b ($a < b$) và c là các số thực.

a) Tìm điều kiện của a và b để $A \subset B$;

b) Tìm điều kiện của c để $A \cap C = \phi$;

c) Tìm phần bù của B trong $\mathbb{R}$;

d) Tìm điều kiện của a và b để $A \cap B \neq \phi$.

Hướng dẫn

a) $a \leq -1$ và $b > 1$;

b) $c < -1$;

c) $(-\infty; a) \cup [b; +\infty)$;

d) $a \leq 1$, $b > -1$ và $a < b$.

Bài 2. Tìm tập xác định và xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$;

b) $f_2(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$;

c) $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{4x^2 - 9}$; d) $f_4(x) = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$.

Hướng dẫn

a) $D = (-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$; Hàm số không chẵn, không lẻ.

b) $D = (-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$; Hàm số không chẵn, không lẻ.

c) $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}; \dfrac{3}{2}\right\}$; Hàm số chẵn.

d) $D = [-1; 1]$; Hàm số lẻ.

Bài 3. Cho hai đường thẳng (d_1): $y = mx - 3$ và (d_2): $x + y = m$

a) Với giá trị nào của m thì $(d_1) \parallel (d_2)$?

b) Với giá trị nào của m thì $(d_1) \perp (d_2)$?

c) Tìm m để (d_1) và (d_2) cắt nhau.

Hướng dẫn

a) $(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow m = -1$

b) $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow m = 1$

c) (d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow m \neq -1$

Bài 4. Ký hiệu (H_0) là đồ thị hàm số: $y = \dfrac{2}{x}$

a) Tại sao (H_0) có tâm đối xứng là gốc tọa độ O?

b) Xác định phép tịnh tiến biến (H_0) thành đồ thị (H_1) của hàm số $y = \dfrac{2}{x - 3}$. Tìm tọa độ tâm đối xứng của (H_1).

c) Xác định phép tịnh tiến biến (H_0) thành đồ thị (H_2) của hàm số $y = \dfrac{2 - 2x}{x}$. Tìm tọa độ tâm đối xứng của (H_2).

Hướng dẫn

a) Vì hàm số $y = \dfrac{2}{x}$ là hàm số lẻ $\Rightarrow$ O là tâm đối xứng.

b) Tịnh tiến (H_0) sang phải 3 đơn vị, tâm đối xứng của (H_1) là (3; 0).

c) Tịnh tiến (H_0) xuống dưới 2 đơn vị, tâm đối xứng của (H_2) là (0; –2).

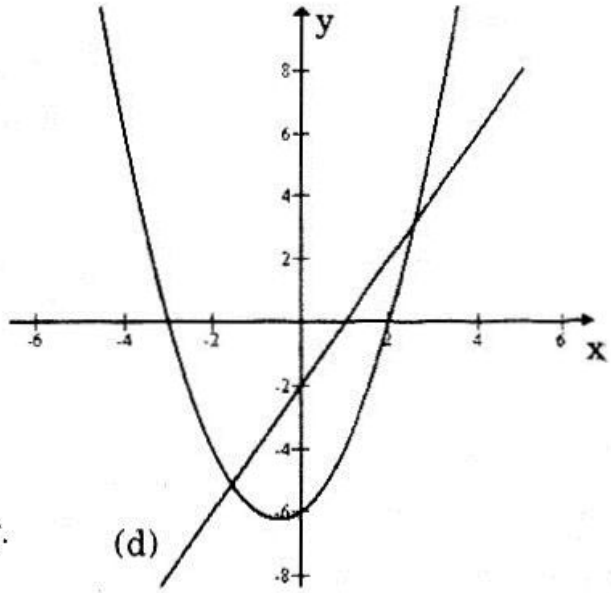
Bài 5. a)Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (p) của: $y = x^2 + x - 6$.

b) Biện luận theo m số giao điểm của (P) và đường thẳng (d): $y = 2x + m$.

c) Khi (d) và (P) cắt nhau, gọi A và B là giao điểm, hãy tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

Hướng dẫn

a) Đồ thị $y = x^2 + x - 6$.



b) Số giao điểm của parabol (P) với đường thẳng (d) đúng bằng số nghiệm của phương trình: $x^2 + x - 6 = 2x + m$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 6 - m = 0 \quad (1)$

Phương trình (1) có:

$\Delta = 4m + 25$

- Nếu $m < -\dfrac{25}{4}$ thì $\Delta < 0$

$\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

$\Rightarrow$ (d) và (P) không có điểm chung.

- Nếu $m = -\dfrac{25}{4}$ thì $\Delta = 0 \Rightarrow$ (1) có nghiệm kép $\Rightarrow$ (d) tiếp xúc với (P) (có 1 điểm chung).
- Nếu $m > -\dfrac{25}{4}$ thì $\Delta > 0 \Rightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt, do đó (P) và (d) có hai điểm chung phân biệt.

c) Giả sử (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm A và B phân biệt. Khi đó hoành độ của A và B chính là nghiệm của phương trình (1), gọi chúng là x_1, x_2.

Hơn nữa A, B $\in$ (d) ta có: $A(x_1; 2x_1 + m)$ và $B(x_2; 2x_2 + m)$ với $m > -\dfrac{25}{4}$.

Gọi I là trung điểm AB thì $I\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; x_1 + x_2 + m\right) \Leftrightarrow I\left(\dfrac{1}{2}; 1 + m\right)$

với $m > -\dfrac{25}{4}$.

Bài 6. Cho phương trình: $2x^2 + (k - 9)x + k^2 + 3k + 4 = 0 \qquad (1)$

a) Tìm k biết rằng (1) có hai nghiệm trùng nhau.

b) Tính nghiệm gần đúng của (1) với $k = -\sqrt{7}$ (chính xác đến hàng phần nghìn).

Hướng dẫn

a) Đáp số: $k = 1$ và $k = -7$

b) Khi $k = -\sqrt{7}$ thì $\Delta = 42\sqrt{7}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = \dfrac{9 + \sqrt{7} - \sqrt{42\sqrt{7}}}{4} \approx 0,276$; $x_2 = \dfrac{9 + \sqrt{7} + \sqrt{42\sqrt{7}}}{4} \approx 5,547$.

Bài 7. Cho phương trình $x^2 + 2\left(\sqrt{3} + 1\right)x + 2\sqrt{3} = 0$

a) Không giải phương trình, tính gần đúng tổng các bình phương hai nghiệm của phương trình (chính xác đến hàng phần trăm).

b) Tính nghiệm gần đúng của phương trình (chính xác đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn

a) Đáp số: 22,93.

b) $x_1 \approx -0,73$; $x_2 \approx -4,73$.

Bài 8. Biện luận theo tham số m số nghiệm và dấu các nghiệm của phương trình:

a) $x^2 - 4(m + 3)x + 6(m^2 - 5m + 6) = 0$;

b) $(m - 1)x^2 - (m - 3)x - m - 3 = 0$.

Hướng dẫn

a) Số nghiệm và dấu các nghiệm của phương trình phụ thuộc vào dấu của các biểu thức sau:

$$\Delta' = -2m^2 + 54m, \quad \frac{c}{a} = 6(m^2 - 5m + 6) \quad \text{và} \quad -\frac{b}{a} = 4(m + 3)$$

Ta lập bảng xét dấu các biểu thức này

m	$-\infty$		-3		0		2		3		27		$+\infty$
$\Delta' = -2m^2 + 54m$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		
$\frac{c}{a} = 6(m^2 - 5m + 6)$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		
$-\frac{b}{a} = 4(m + 3)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		

Từ bảng trên ta có kết luận sau:

- Nếu $m < 0$ hoặc $m > 27$ thì $\Delta' < 0$ nên phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = 0$ hoặc $m = 27$ thì $\Delta' = 0$, $\frac{c}{a} > 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$ nên phương trình có 1 nghiệm dương (nghiệm kép).
- Nếu $0 < m < 2$ hoặc $2 < m < 27$ thì $\Delta' > 0$, $\frac{c}{a} > 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$ nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- Nếu $2 < m < 3$ thì $\frac{c}{a} < 0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- Nếu $m = 2$ hoặc $m = 3$ thì $\frac{c}{a} = 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$ nên phương trình có một nghiệm $x = 0$ còn nghiệm kia dương.

b) Khi $m = 1$, ta có phương trình $2x - 4 = 0$, phương trình có một nghiệm dương.

Khi $m \neq 1$ ta có phương trình bậc 2. Số nghiệm và dấu của các nghiệm phụ thuộc vào dấu các biểu thức sau:

$$\Delta = 5m^2 + 2m - 3;\ \frac{c}{a} = \frac{-m-3}{m-1};\ -\frac{b}{a} = \frac{m-3}{m-1}.$$

Lập bảng xét dấu các biểu thức này

m	$-\infty$	-3	-1	$\frac{3}{5}$	1	3	$+\infty$
$\Delta = 5m^2 + 2m - 3$	+	+ 0	−	0 +		+	+
$\frac{c}{a} = \frac{-m-3}{m-1}$	− 0	+	+	+	−	−	
$-\frac{b}{a} = \frac{m-3}{m-1}$	+	+	+	−	− 0	+	

Từ bảng xét dấu suy ra kết quả sau:

- Nếu $-1 < m < \frac{3}{5}$ thì $\Delta < 0$ nên phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m < -3$ hoặc $m > 1$ thì $\frac{c}{a} < 0$ nên phương trình có hai nghiệm trái dấu.
- Nếu $-3 < m < -1$ hoặc $\frac{3}{5} < m < 1$ thì $\Delta > 0$, $\frac{c}{a} > 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$ nên phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
- Nếu $m = -3$ thì , $\frac{c}{a} = 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$ nên phương trình có một nghiệm $x = 0$ nghiệm kia dương $\left(x = \frac{3}{2}\right)$.
- Nếu $m = -1$ hoặc $m = \frac{5}{3}$ thì $\Delta = 0$, $\frac{c}{a} > 0$ và $-\frac{b}{a} > 0$ nên phương trình có một nghiệm (kép) dương.

Bài 9. Giải và biện luận các phương trình:

a) $\frac{mx - m - 3}{x + 1} = 1$; **b)** $|(m+1)x - 3| = |x + 2|$; **c)** $(mx + 1)\sqrt{x - 1} = 0$.

Hướng dẫn

a) Với điều kiện $x \neq -1$, phương trình đã cho tương đương với

$$mx - m - 3 = x + 1 \Leftrightarrow (m-1)x = m + 4\ (1)$$

Nếu $m = 1$ thì (1) vô nghiệm $\Rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm

Nếu $m \neq 1$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{m+4}{m-1}$. Giá trị này là nghiệm của phương trình đã cho nếu nó thỏa mãn $x \neq -1$, tức là:

$$\frac{m+4}{m-1} \neq -1 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq -\frac{3}{2}$$

Kết luận:

- Phương trình có nghiệm $x = \frac{m+4}{m-1}$ nếu $m \neq 1$ và $m \neq -\frac{3}{2}$.

- Phương trình vô nghiệm mếu $m = 1$ hoặc $m = -\frac{3}{2}$.

b) Ta có $|(m+1)x - 3| = |x + 2|$

$\Leftrightarrow (m+1)x - 3 = x + 2$ (1)

hoặc $(m+1)x - 3 = -x - 2$ (2)

- Ta có (1) $\Leftrightarrow (m+1)x - 3 = x + 2 \Leftrightarrow mx = 5$, phương trình này có nghiệm $x = \frac{5}{m}$ nếu $m \neq 0$ và vô nghiệm nếu $m = 0$.
- Phương trình (2): $(m+1)x - 3 = -x - 2 \Leftrightarrow (m+2)x = 1$, phương trình này có nghiệm $x = \frac{1}{m+2}$ nếu $m \neq -2$ và vô nghiệm nếu $m = -2$.

Để kết luận ta có bảng sau:

m	Nghiệm của (1)	Nghiệm của (2)	Nghiệm của phương trình đã cho
$m \neq 0$ và $m = -2$	$T_1 = \left\{\frac{5}{m}\right\}$	$T_2 = \left\{\frac{1}{m+2}\right\}$	$T = \left\{\frac{5}{m}; \frac{1}{m+2}\right\}$
$m = 0$	$T_1 = \varnothing$	$T_2 = \left\{\frac{1}{m+2}\right\}$	$T = T_2 = \left\{\frac{1}{m+2}\right\}$
$m = -2$	$T_1 = \left\{\frac{5}{m}\right\}$	$T_2 = \varnothing$	$T = T_1 = \left\{\frac{5}{m}\right\}$

c) Với điều kiện $x \geq 1$, ta có: $(mx+1)\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx + 1 = 0 & (1) \\ x - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

- Ta có (1) $\Leftrightarrow mx = -1$. Phương trình này vô nghiệm nếu $m = 0$ và có nghiệm $x = -\frac{1}{m}$ nếu $m \neq 0$. Giá trị này còn phải thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$ tức là: $-\frac{1}{m} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$.
- (2) $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$)

Kết luận:

m	Nghiệm của (1)	Nghiệm của (2)	Nghiệm của phương trình đã cho
$-1 \le m < 0$	$T_1 = \left\{-\frac{1}{m}\right\}$	$T_2 = \{1\}$	$T = \left\{-\frac{1}{m}; 1\right\}$
$\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m \ge 0 \end{array}\right.$	$T_1 = \varnothing$	$T_2 = \{1\}$	$T = T_2 = \{1\}$

Bài 10. a) Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm x_1 và x_2 thỏa mãn các hệ thức: $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 0$; $\quad m(x_1 + x_2) - x_1x_2 = 3m + 4$

b) Xét dấu các nghiệm phương trình đó tùy theo m.

Hướng dẫn

a) Đặt $S = x_1 + x_2$ và $P = x_1.x_2$. Các điều kiện bài toán được thể hiện qua hệ phương trình (ẩn S và P): $\begin{cases} S + P = 0 \\ mS - P = 3m + 4 \end{cases}$ (1)

Khi $m = -1$ thì hệ (1) vô nghiệm, nghĩa là không có phương trình nào thỏa mãn điều kiện của bài toán.

Khi $m \ne -1$, hệ (1) có một nghiệm $(S; P) = \left(\frac{3m + 4}{m + 1}; -\frac{3m + 4}{m + 1}\right)$ (2)

Vậy phương trình cần tìm là: $x^2 - Sx + P = 0$

hay $\quad x^2 - \frac{3m + 4}{m + 1}x - \frac{3m + 4}{m + 1} = 0,$

hay $\quad (m + 1)x^2 - (3m + 4)x - (3m + 4) = 0$ (3)

Điều kiện để phương trình (3) có nghiệm là:

$$\Delta = (3m + 4)^2 + 4(m + 1)(3m + 4) = (3m + 4)(7m + 8) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m \le -\frac{4}{3} \\ m \ge -\frac{8}{7} \end{array}\right. \qquad (4)$$

Tóm lại, phương trình cần tìm là phương trình (3) với điều kiện của m là $m \ne -1$ và thỏa (4).

b) Dễ thấy $S = -P = \frac{3m + 4}{m + 1} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\frac{4}{3} \\ m > -1 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (4), ta suy ra:

- Nếu $m < -\frac{4}{3}$ hoặc $m > -1$ thì $P < 0$ nên (3) có hai nghiệm trái dấu;
- Nếu $m = -\frac{4}{3}$ thì phương trình (3) có một nghiệm (kép) $x = 0$.

- Nếu $-\frac{7}{8} \le m < -1$ thì $P > 0$, $S > 0$ nên phương trình (3) có hai nghiệm âm;
- Nếu $-\frac{4}{3} < m < -\frac{7}{8}$ thì phương trình (3) vô nghiệm.

Bài 11. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}(m+3)x + 2y = m \\ (3m+1)x + (m+1)y = 1\end{cases}$; **b)** $\begin{cases}(2m+3)x + 5y = m - 11 \\ (m+2)x + 2y = m - 2\end{cases}$

Hướng dẫn

a) Nếu $m \ne 1$ thì nghiệm hệ là $(x; y) = \left(\frac{m+2}{m-1}; \frac{-3(m+1)}{m-1}\right)$

Nếu $m = 1$ thì hệ có vô số nghiệm là $\left(x; -2x + \frac{1}{2}\right)$ với $x \in \mathbb{R}$

b) Nếu $m \ne -4$ thì hệ có nghiệm là: $(x; y) = (3; -m - 4)$

Nếu $m = -4$ thì hệ có nghiệm $(x; x - 3)$ với $x \in \mathbb{R}$

Bài 12. Giải hệ sau:

a) $\begin{cases}x^2 - 5xy + y^2 = 7 \\ 2x + y = 1\end{cases}$; **b)** $\begin{cases}x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x + y + xy = 5\end{cases}$;

c) $\begin{cases}x^2 + y^2 - x + y = 2 \\ xy + x - y = -1\end{cases}$.

Hướng dẫn

Đáp số: **a)** Nghiệm hệ: $(1; -1); \left(-\frac{2}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

b) Nghiệm hệ: $(2; 1); (1; 2)$.

c) Nghiệm hệ: $(-1; 0); (0; 1)$.

Bài 13. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^2 + 6}{\sqrt{a^2 + 2}} \ge 4 \ \forall a \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ $(a, b, c \in \mathbb{R}^*)$.

Hướng dẫn

a) Đặt $x = \sqrt{a^2 + 2}$, ta có $x \ge \sqrt{2}$ và bất đẳng thức trở thành.

$$\frac{x^2 + 4}{x} \ge 4 \Leftrightarrow x + \frac{4}{x} \ge 4 \Leftrightarrow (đpcm).$$

b) Ta có $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \ge 2.\frac{a}{c}$ tương tự $\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge 2.\frac{b}{a}$ và $\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \ge 2.\frac{c}{b}$

Cộng từng vế 3 bất đẳng thức trên ta được (đpcm).

Bài 14. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau trên khoảng đã cho:

a) $f(x) = x + \dfrac{2}{x+2}$ trên $(-2; +\infty)$; b) $g(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

Hướng dẫn

a) Trên khoảng $(-2; +\infty)$ ta có $x + 2 > 0$.

Do đó:

$$x + \frac{2}{x+2} = (x+2) + \frac{2}{x+2} - 2 \geq 2.\sqrt{(x+2).\frac{2}{x+2}} - 2 = 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

$$\Rightarrow \underset{(-2;+\infty)}{\text{Min}}\, f(x) = 2(\sqrt{2} - 1) \text{ khi } x + 2 = \frac{2}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow x + 2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} - 2.$$

b) Trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có $x > 0$ nên

$$3x^2 + \frac{1}{x} = 3x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3.\sqrt[3]{3x^2.\frac{1}{2x}.\frac{1}{2x}} = 3.\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \underset{(0;+\infty)}{\text{Min}}\, g(x) = 3.\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \text{ khi } 3x^2 = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{6}}.$$

Bài 15. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số: $f(x) = (2 - x)(2x + 1)$ trên $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Hướng dẫn

$x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \\ 2x + 1 > 0 \end{cases}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$2.f(x) = (4 - 2x)(2x + 1) \leq \left(\frac{4 - 2x + 2x + 1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{25}{8} \ \forall x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$\Rightarrow \underset{\left(-\frac{1}{2};2\right)}{\text{Max}}\, f(x) = \frac{25}{8} \text{ khi } 4 - 2x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Cách 2: Lập bảng biểu thức hàm số $f(x)$ trên khoảng $\left(-\dfrac{1}{2}; 2\right) \Rightarrow$ kết quả.

Bài 16. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 & (1) \\ \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{1}{x} & (2) \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2 + 3x + 2 < 0 \\ \dfrac{x}{x+1} \geq 0 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) • Ta có: $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < -2 \end{array}\right.$;

Vậy tập nghiệm $T_1 = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

• Ta có: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+2}\ge\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{x^2-2}{x(x+1)(x+2)}\ge 0$

Lập bảng xét dấu ta có tập nghiệm bất phương trình này là:

$$T_2=\left(-2;-\sqrt{2}\right]\cup(-1;0)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$$

Vậy tập nghiệm của hệ là: $T=T_1\cap T_2=(2;+\infty)$.

b) Đáp số: $T=(-2;-1)$.

Bài 17. Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+8}=3x+4$; **b)** $|x^2+5x+6|=3x+13$;

c) $(x^2+3x)(x^2+3x+4)=5$.

Giải

a) $x=-\dfrac{4}{9}$.

b) • Nếu $-3<x<-2$ thì $x^2+5x+6<0$ phương trình đã cho tương đương với phương trình $-(x^2+5x+6)=3x+13$ phương trình này vô nghiệm.

• Nếu $x\le -3$ hoặc $x\ge -2$ thì $x^2+5x+6\ge 0$ phương trình đã cho tương đương với phương trình $x^2+5x+6=3x+13$ tức là $x^2+2x-7=0\Leftrightarrow x=-1\pm 2\sqrt{2}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1, x_2=-1\pm 2\sqrt{2}$.

c) Đặt $t=x^2+3x$ ta có phương trình: $t^2+4t-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-5\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+3x=1\\x^2+3x=-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+3x-1=0\\x^2+3x+5=0\ \text{(VN)}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=-\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$$

Bài 18. Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2-|5x+2|>0$; **b)** $\sqrt{2x^2+7x+5}>x+1$;

c) $\sqrt{x^2+4x-5}\le x+3$.

Hướng dẫn

a) Ta có bất phương trình đã cho tương đương với hai hệ sau:

$$\text{(I)}\ \begin{cases}5x+2\ge 0\\3x^2-5x-2>0\end{cases}\quad\text{và}\quad\text{(II)}\ \begin{cases}5x+2<0\\3x^2+5x+2>0\end{cases}$$

• Ta có: (I) $\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\dfrac{2}{5}\\x<-\dfrac{1}{3}\ \text{hoặc}\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\dfrac{2}{5}\le x<-\dfrac{1}{3}\\x>2\end{array}\right.$

Hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < -\dfrac{2}{5} \\ x < -1 \text{ hoặc } x > -\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -\dfrac{2}{3} < x < -\dfrac{2}{5} \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là:

$$T = (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty).$$

b) Bất phương trình đã cho tương đương với hai hệ sau:

(I) $\begin{cases} x + 1 < 0 \\ 2x^2 + 7x + 5 \geq 0 \end{cases}$ và (II) $\begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 2x^2 + 7x + 5 \geq (x + 1)^2 \end{cases}$

Ta có: (I) $\Leftrightarrow x \leq -\dfrac{5}{2}$ và (II) $\Leftrightarrow x > -1$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là:

$$T = \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup (-1; +\infty).$$

c) Bất phương trình đã cho tương đương với hệ:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 \geq 0 \\ x^2 + 4x - 5 \leq (x + 3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq -5 \text{ hoặc } x \geq 1 \\ x \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = [1; +\infty)$.

Bài 19. Điểm thi của 32 học sinh trong kỳ thi tiếng Anh (thang điểm 100) như sau: 68; 79; 65; 85; 52; 81; 55; 65; 49; 42; 68; 66; 56; 57; 65; 72; 69; 60; 50; 63; 74; 88; 78; 95; 41; 87; 61; 72; 59; 47; 90; 74.

a) Hãy trình bày số liệu trên dưới dạng bảng phân bố tần số ghép lớp với các lớp [40; 50); [50; 60); . . . . ; [90; 100].

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

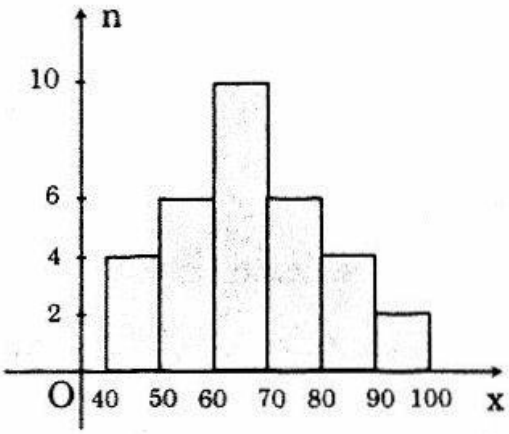
c) Tính số trung bình (chính xác đến hàng phần trăm). Tính số trung vị.

Hướng dẫn

a) Bảng phân bố tần số ghép:

Lớp	Trung điểm	Tần số
[40; 50)	45	4
[50; 60)	55	6
[60; 70)	65	10
[70; 80)	75	6
[80; 90)	85	4
[90; 100]	95	2
Cộng		N = 32

b) Biểu đồ tần số



c) Số trung bình $\bar{x} = 66,65$. (Chú ý: Nếu ta tính số trung bình từ bảng phân bố tần số ghép lớp thì được $\bar{x} \approx 66,87$). Số trung vị Me = 65,5.

Bài 20. Một siêu thị thu nhập được các số liệu sau đây về số tiền (đơn vị: nghìn đồng) mà mỗi người đã mua ở đây:

Lớp	Tần số
[0; 99]	20
[100; 199]	80
[200; 299]	70
[300; 399]	30
[400; 499]	10

a) Dấu hiệu điều tra ở đây là gì?

b) Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn

a) Đơn vị điều tra: khách mua hàng trong siêu thị
Dấu hiệu: số tiền mua hàng.

b) Bảng phân bố tần số ghép lớp

Lớp	Trung điểm	Tần số
[0; 99]	49,5	20
[100; 199]	149,5	80
[200; 299]	249,5	70
[300; 399]	349,5	30
[400; 499]	449,5	10
		N = 210

Bài 21. Tuổi của 60 cán bộ trong một cơ quan được thống kê và trình bày trong bảng phân bố tần số ghép lớp sau:

Lớp	Tần số
[20; 30)	13
[30; 40)	26
[40; 50)	15
[50; 60]	6

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì?

b) Tìm số trung bình.

c) Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

d) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

e) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn

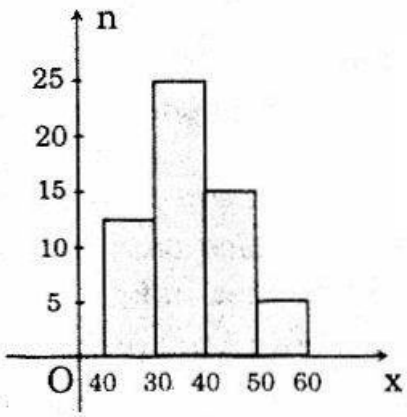
a) Đơn vị điều tra: cán bộ.
Dấu hiệu: tuổi

b) Số trung bình $\bar{x} = 37,33$.

c) Bảng phân bố tần số - Tần suất ghép lớp.

Lớp	Trung điểm	Tần số	Tần suất
[20; 30)	25	13	21,67%
[30; 40)	35	26	43,33%
[40; 50)	45	15	25%
[50; 60]	55	6	10%
		N = 60	

d) Biểu đồ tần số :



e) Phương sai là 81,22
Độ lệch chuẩn là: 9,01

Bài 22.

a) Biết $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{3}{4}$ và các điểm trên đường tròn lượng giác xác định bởi số α và β nằm ở góc phần tư thứ II. Hãy tính các giá trị lượng giác của $\alpha + \beta$ và $\alpha - \beta$.

b) Cho $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$. Hãy tính các giá trị lương giác của α.

Hướng dẫn

a) Từ giả thiết suy ra $\cos\alpha < 0$ và $\sin\beta > 0$. Do đó:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{\sqrt{7}}{4};$$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$

$= -\frac{\sqrt{5}}{3}.\left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}{12}$;

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$

$= \frac{2}{3}.\left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right).\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{-6 - \sqrt{35}}{12}$;

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta = \frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{12}$;

$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta = \frac{-6 + \sqrt{35}}{12}$;

Từ đó dễ dàng suy ra $\tan(\alpha + \beta)$, $\cot(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha - \beta)$ và $\cot(\alpha - \beta)$.

b) Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ nên $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$, suy ra $\cos 2\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$ và $\cos\alpha < 0$, Vậy: $\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -\frac{3}{5}$;

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha = \frac{8}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\tan\alpha = -2$; $\cot\alpha = -\frac{1}{2}$.

Bài 23. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + a\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - a\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.\sin 2a$;

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{2}$;

c) $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).\tan\alpha.\tan\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \tan 3\alpha$.

Ứng dụng tính: $\tan 10^\circ.\tan 50^\circ.\tan 110^\circ$.

Hướng dẫn

a) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + a\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - a\right) =$

$= \left(\sin\frac{\pi}{8}\cos a + \sin a\cos\frac{\pi}{8}\right)^2 - \left(\sin\frac{\pi}{8}\cos a - \sin a\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

$= 4\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}\sin a\cos a = \sin\frac{\pi}{4}\sin 2a = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a$.

b) Chứng minh: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3}$ và $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3}$, ta có:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) =$$

$$= \cos^2\alpha + \left(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha + \sin\alpha\sin\frac{2\pi}{3}\right)^2$$

$$= \cos^2\alpha + 2\left(\frac{1}{4}\cos^2\alpha + \frac{3}{4}\sin^2\alpha\right) = \frac{3}{2}.$$

c) $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right).\tan\alpha.\tan\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{3} - \tan\alpha}{1 + \sqrt{3}\tan\alpha}\tan\alpha\frac{\sqrt{3} + \tan\alpha}{1 - \sqrt{3}\tan\alpha}$

$$= \frac{3 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}.\tan\alpha \qquad (1)$$

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 + \tan\alpha\tan 2\alpha} = \frac{\dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.\tan\alpha} = \frac{3 - \tan^2\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}.\tan\alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (đpcm).

Áp dụng: $\tan 10^\circ.\tan 50^\circ.\tan 110^\circ = \tan(60^\circ - 50^\circ).\tan 50^\circ.\tan(60^\circ + 50^\circ)$

$$= \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bài 24. Chứng minh rằng:

a) $\sin(\alpha + \beta).\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$;

b) $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$ (khi các biểu thức có nghĩa).

Hướng dẫn

a) $\sin(\alpha + \beta).\sin(\alpha - \beta) =$

$= (\sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha).(\sin\alpha.\cos\beta - \sin\beta.\cos\alpha)$

$= \sin^2\alpha.\cos^2\beta - \sin^2\beta.\cos^2\alpha = \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta) - \sin^2\beta(1 - \sin^2\alpha)$

$= \sin^2\alpha - \sin^2\beta = (1 - \cos^2\alpha) - (1 - \cos^2\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha.$

b) $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha.\cos\beta + \sin\beta.\cos\alpha}{\cos\alpha.\cos\beta}$

$$= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

Tương tự: $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$,

Do đó: $\dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha - \tan\beta} = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$.

Bà 25. Tìm các số c và β sao cho: $\sin\alpha + \cos\alpha = c.\sin(\alpha + \beta)$ với mọi α.

Hướng dẫn

Ta có: $\sin\alpha + \cos\alpha = c.\sin(\alpha + \beta)\ \forall\alpha$

$\Rightarrow \quad (c.\cos\beta - 1)\sin\alpha + (c.\sin\beta - 1)\cos\alpha = 0, \quad \forall\alpha$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} c.\cos\beta - 1 = 0 \\ c.\sin\beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\beta = \dfrac{1}{c} \\ \sin\beta = \dfrac{1}{c} \end{cases}$. Từ đó ta tính được:

$= \sqrt{2}, \ \beta = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $c = -\sqrt{2}, \ \beta = -\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

MỤC LỤC

Lời nói đầu *Trang*

Chương I. MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1. Mệnh đề và mệnh đề chứa biến 5

§2. Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học 8

§3. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp 12

§4. Số gần đúng và sai số 19

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương I 22

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. Đại cương về hàm số 28

§2. Hàm số bậc nhất 36

§3. Hàm số bậc hai 42

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương II 50

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. Đại cương về phương trình 56

§2. Phương trình bậc nhất và bậc hai một ẩn 56

§3. Phương trình quy về phương trình bậc nhất và bậc hai 71

§4. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn 79

§5. Một số ví dụ về hệ phương trình bậc hai hai ẩn 87

Câu hỏi và bài tập ôn tập chương III 91

Chương IV. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. Bất đẳng thức và chứng minh bất đẳng thức 101

§2. Đại cương về bất phương trình 108

§3. Bất phương trình và hệ bật phương trình bậc nhất một ẩn 112

§4. Dấu của nhị thức bậc nhất 117

§5. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 125
§6. Dấu của tam thức bậc hai 132
§7. Bất phương trình bậc hai 135
§8. Một số phương trình và bất phương trình quy về bậc hai 140
Câu hỏi và bài tập ôn tập chương IV 146

Chương V. THỐNG KÊ

§1. Một vài khái niệm cơ bản 153
§2. Trình bày một mẫu số liệu 154
§3. Các số đặc trưng của mẫu số liệu 160
Câu hỏi và bài tập ôn tập chương V 165

Chương VI. GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. Góc và cung lượng giác 169
§2. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác 174
§3. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt 181
§4. Một số công thức lượng giác 189
Câu hỏi và bài tập ôn tập chương VI 200
Câu hỏi và bài tập ôn tập cuối năm 206

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP ĐẠI SỐ 10 NÂNG CAO

Nguyễn Văn Lộc (Chủ biên)

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 39714896: (04) 39724770; Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Chịu trách nhiệm nội dung

Biên tập: PHAN HẢI NHƯ

Trình bày bìa: QUỐC VIỆT

Đối tác liên kết xuất bản:

CÔNG TY SÁCH – THIẾT BỊ GIÁO DỤC ĐỨC TRÍ

Mã số: 1L - 92 ĐH2009
In 3.000 cuốn, khổ 16 x 24cm tại Trung tâm Mỹ thuật ứng dụng
Số xuất bản: 345-2009/CXB/42-54/ĐHQGHN, ngày 24/04/2009
Quyết định xuất bản số: 92 LK-TN/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2009.